This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

HN 65UW R
KF
6391

KF6391

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.
Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Abrifs der Geschichte der deutschen National-Litteratur. Nach G. Brugier auf Grund eigener Studien z. Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten u. z. Selbstbelehrung bearb. v. *E. M. Harms (E. M. Hamann). 3. Aufl.* *M.* 2.50; geb. *M.* 3.20.

BAUMHAUER, Dr. H., **Leitfaden der Chemie** insbes. z. Gebrauch an landwirtschaftl. Lehranstalten. **I. Anorganische Chemie.** *3. Aufl.* Mit 32 Abbildungen. *M.* 1.50; geb. *M.* 1.85. — **II. Organische Chemie,** mit bes. Berücksichtigung der landwirtsch.-techn. Nebengewerbe. *3. Aufl.* Mit 16 Abbildungen. *M.* 1; geb. *M.* 1.35.

— **Kurzes Lehrbuch der Mineralogie** (einschliefslich Petrographie) zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. *2. Aufl.* Mit 187 in den Text gedruckten Holzschnitten. *M.* 2.20; geb. *M.* 2.55.

BRUGIER, G., Geschichte der deutschen National-Litteratur. Nebst kurzgef. Poetik. Für Schule u. Selbstbelehrung. *10. Aufl.* *M.* 6.50; geb. *M.* 8.50.

DREHER, Dr. Th., **Kleine Grammatik der hebräischen Sprache** mit Übungs- und Lesestücken. Für Obergymnasien. *2. Aufl.* *M.* 1.70; geb. *M.* 2.

FECHT, Dr. K., **Griechisches Übungsbuch für Untertertia.** *3. Aufl.* *M.* 1.25; geb. *M.* 1.50. — **Griechisches Übungsbuch für Obertertia.** *2. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.85.

FUSS, K., u. G. HENSOLD, Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterr. Mit vielen Übungsaufg., Spektraltafel in Farbendr. u. 357 Abbildungen. *3. Aufl.* *M.* 4.20; geb. *M.* 4.65.

— *4. Aufl.*, n. d. bayer. Lehrplänen bearb. Verkürzte Ausg. *M.* 4; geb. *M.* 4.45.

GEISTBECK, Dr. M., **Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie** f. Mittelschulen u. Lehrerbildungs-Anstalten. *20. u. 21. Aufl.*, mit vielen Illustr. *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

GIETMANN, G., S. J., Grundrifs der Stilistik, Poetik und Ästhetik. Für Schulen u. z. Selbstunterr. Mit 3 Abbildungen u. 1 Farbentafel. *M.* 4; geb. *M.* 4.50.

HENSE, Dr. J., **Deutsches Lesebuch** f. d. oberen Klassen höherer Lehranstalten. Auswahl deutscher Poesie u. Prosa mit litterarhist. Darstellungen u. Übersichten. **I. Dichtung d. Mittelalters.** *3. Aufl.* *M.* 1.80; geb. *M.* 2.25. — **II. Dichtung d. Neuzeit.** *2. Aufl.* *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70. — **III. Beschreibende u. lehrende Prosa.** *2. Aufl.*, mit 5 Abbildungen. *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70.

KLEIN, S., Lehrbuch der Weltgeschichte für Schulen. *9. Aufl.* *M.* 3; geb. *M.* 3.40.

KRASS, Dr. M., u. Dr. H. **LANDOIS, Lehrbuch f. d. Unterricht in der Naturbeschreibung.** Für Gymnasien, Realgymn. u. a. höh. Lehranstalten bearb. **I. Lehrbuch d. Zoologie.** Mit 228 Abbildgen. *6. Aufl.* *M.* 3.40; geb. *M.* 3.80. — **II. Lehrbuch d. Botanik.** Mit 313 Abbildgen. *5. Aufl.* *M.* 3.20; geb. *M.* 3.60. — **III. Lehrbuch d. Mineralogie.** Mit 114 Abbildgen u. 3 Tafeln. *2. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Der Mensch und die drei Reiche der Natur** in Wort und Bild f. d. Schulunterricht in der Naturgeschichte. **I. Der Mensch und das Tierreich.** Mit 197 Abbildungen. *12. Aufl.* *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. — **II. Das Pflanzenreich.** Mit 239 Abbildungen. *10. Aufl.* *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. — **III. Das Mineralreich.** Mit 93 Abbildungen. *6. Aufl.* *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

LORSCHEID, Dr. J., **Lehrbuch der anorganischen Chemie** mit einem kurzen Grundrifs der Mineralogie. Mit 221 Abbildungen u. Spektraltafel in Farbendr. *14. Aufl.*, von Dr. *F. Lehmann.* *M.* 3.50; geb. *M.* 4.

MERTENS, Dr. M., **Hilfsbuch für den Unterricht in der alten Geschichte.** *3. u. 4. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Hilfsbuch für den Unterricht in der deutschen Geschichte.** *3 u. 4. Aufl.* 3 Teile. **I.** *M.* 1.40; geb. *M.* 1.70. — **II.** *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50. — **III.** *M.* 1.60; geb. *M.* 1.90. — In 1 Band *M.* 4.20; geb. *M.* 4.70.

MÜNCH, Dr. P., **Lehrbuch der Physik.** *11. Aufl., nach den preufsischen Lehrplänen von 1892 in zwei Teilen bearb.* von Dr. *H. Lüdtke.* **I. Vorbereitender Lehrgang.** Mit Anhang: *Von den chemischen Erscheinungen.* Mit 209 Abbildungen. *M.* 1.80; geb. *M.* 2.15. — **II. Ausführlicher Lehrgang.** Mit Anhang: *Die Grundlehren der mathematischen Geographie.* Mit 236 Abbildungen u. Spektraltafel in Farbendruck. *M.* 3; geb. *M.* 3.45.

PLÜSS, Dr. B., **Leitfaden der Naturgeschichte.** Zoologie — Botanik — Mineralogie. *7. Aufl.* *M.* 2.50; geb. *M.* 2.90.

Digitized by Google

Digitized by Google

KF6391

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.
Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

Abrifs der Geschichte der deutschen National-Litteratur. Nach G. Brugier auf Grund eigener Studien z. Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten u. z. Selbstbelehrung bearb. v. *E. M. Harms (E. M. Hamann). 3. Aufl.* *M.* 2.50; geb. *M.* 3.20.

BAUMHAUER, Dr. H., **Leitfaden der Chemie** insbes. z. Gebrauch an landwirtschaftl. Lehranstalten. **I. Anorganische Chemie.** *3. Aufl.* Mit 32 Abbildungen. *M.* 1.50; geb. *M.* 1.85. — **II. Organische Chemie,** mit bes. Berücksichtigung der landwirtsch.-techn. Nebengewerbe. *3. Aufl.* Mit 16 Abbildungen. *M.* 1; geb. *M.* 1.35.

— **Kurzes Lehrbuch der Mineralogie** (einschliefslich Petrographie) zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. *2. Aufl.* Mit 187 in den Text gedruckten Holzschnitten. *M.* 2.20; geb. *M.* 2.55.

BRUGIER, G., Geschichte der deutschen National-Litteratur. Nebst kurzgef. Poetik. Für Schule u. Selbstbelehrung. *10. Aufl.* *M.* 6.50; geb. *M.* 8.50.

DREHER, Dr. Th., **Kleine Grammatik der hebräischen Sprache** mit Übungs- und Lesestücken. Für Obergymnasien. *2. Aufl.* *M.* 1.70; geb. *M.* 2.

FECHT, Dr. K., **Griechisches Übungsbuch für Untertertia.** *3. Aufl.* *M.* 1.25; geb. *M.* 1.50. — **Griechisches Übungsbuch für Obertertia.** *2. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.85.

FUSS, K., u. G. HENSOLD, Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterr. Mit vielen Übungsaufg., Spektraltafel in Farbendr. u. 357 Abbildungen. *3. Aufl.* *M.* 4.20; geb. *M.* 4.65.

— *4. Aufl.*, n. d. bayer. Lehrplänen bearb. Verkürzte Ausg. *M.* 4; geb. *M.* 4.45.

GEISTBECK, Dr. M., **Leitfaden der mathematischen und physikalischen Geographie** f. Mittelschulen u. Lehrerbildungs-Anstalten. *20. u. 21. Aufl.*, mit vielen Illustr. *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

GIETMANN, G., S. J., Grundrifs der Stilistik, Poetik und Ästhetik. Für Schulen u. z. Selbstunterr. Mit 3 Abbildungen u. 1 Farbentafel. *M.* 4; geb. *M.* 4.50.

HENSE, Dr. J., **Deutsches Lesebuch** f. d. oberen Klassen höherer Lehranstalten. Auswahl deutscher Poesie u. Prosa mit litterarhist. Darstellungen u. Übersichten. **I. Dichtung d. Mittelalters.** *3. Aufl.* *M.* 1.80; geb. *M.* 2.25. — **II. Dichtung d. Neuzeit.** *2. Aufl.* *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70. — **III. Beschreibende u. lehrende Prosa.** *2. Aufl.*, mit 5 Abbildungen. *M.* 3.20; geb. *M.* 3.70.

KLEIN, S., Lehrbuch der Weltgeschichte für Schulen. *9. Aufl.* *M.* 3; geb. *M.* 3.40.

KRASS, Dr. M., u. Dr. H. **LANDOIS, Lehrbuch f. d. Unterricht in der Naturbeschreibung.** Für Gymnasien, Realgymn. u. a. höh. Lehranstalten bearb. **I. Lehrbuch d. Zoologie.** Mit 228 Abbildgen. *6. Aufl.* *M.* 3.40; geb. *M.* 3.80. — **II. Lehrbuch d. Botanik.** Mit 313 Abbildgen. *5. Aufl.* *M.* 3.20; geb. *M.* 3.60. — **III. Lehrbuch d. Mineralogie.** Mit 114 Abbildgen u. 3 Tafeln. *2. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Der Mensch und die drei Reiche der Natur** in Wort und Bild f. d. Schulunterricht in der Naturgeschichte. **I. Der Mensch und das Tierreich.** Mit 197 Abbildungen. *12. Aufl.* *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. — **II. Das Pflanzenreich.** Mit 239 Abbildungen. *10. Aufl.* *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. — **III. Das Mineralreich.** Mit 93 Abbildungen. *6. Aufl.* *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

LORSCHEID, Dr. J., **Lehrbuch der anorganischen Chemie** mit einem kurzen Grundrifs der Mineralogie. Mit 221 Abbildungen u. Spektraltafel in Farbendr. *14. Aufl.*, von Dr. *F. Lehmann.* *M.* 3.50; geb. *M.* 4.

MERTENS, Dr. M., **Hilfsbuch für den Unterricht in der alten Geschichte.** *3. u. 4. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Hilfsbuch für den Unterricht in der deutschen Geschichte.** *3 u. 4. Aufl.* 3 Teile. **I.** *M.* 1.40; geb. *M.* 1.70. — **II.** *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50. — **III.** *M.* 1.60; geb. *M.* 1.90. — In 1 Band *M.* 4.20; geb. *M.* 4.70.

MÜNCH, Dr. P., **Lehrbuch der Physik.** *11. Aufl., nach den preufsischen Lehrplänen von 1892 in zwei Teilen bearb.* von Dr. *H. Lüdtke.* **I. Vorbereitender Lehrgang.** Mit Anhang: *Von den chemischen Erscheinungen.* Mit 209 Abbildungen. *M.* 1.80; geb. *M.* 2.15. — **II. Ausführlicher Lehrgang.** Mit Anhang: *Die Grundlehren der mathematischen Geographie.* Mit 236 Abbildungen u. Spektraltafel in Farbendruck. *M.* 3; geb. *M.* 3.45.

PLÜSS, Dr. B., **Leitfaden der Naturgeschichte.** Zoologie — Botanik — Mineralogie. *7. Aufl.* *M.* 2.50; geb. *M.* 2.90.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Sammlung

von

Aufgaben aus der Arithmetik.

Digitized by Google

Digitized by Google

Sammlung

von

Aufgaben aus der Arithmetik

für höhere Lehranstalten.

Von

Karl Schwering,
Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche in Cöln.

Erster Lehrgang.

Zweite, verbesserte Auflage.

Freiburg im Breisgau.
Herdersche Verlagshandlung.
1902.
Zweigniederlassungen in Wien, Strafsburg, München und St. Louis, Mo.

Digitized by Google

KF6391

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY
46*217

Alle Rechte vorbehalten.

Buchdruckerei der Herderschen Verlagshandlung in Freiburg.

Digitized by Google

Vorwort zur ersten und zweiten Auflage.

Vorliegende Aufgabensammlung erscheint in drei besonderen Abteilungen, Lehrgängen. Jeder Lehrgang bildet, soweit dies bei der Natur des Gegenstandes erreichbar schien, ein besonderes Ganzes und wird einzeln abgegeben.

Die im Texte gegebenen methodischen Bemerkungen gelten besonders beim Gebrauche des Buches für Privat- und Selbstunterricht. Um Mifsverständnissen vorzubeugen, sei hier ausdrücklich bemerkt, dafs diese Bemerkungen für den öffentlichen Unterricht nur soviel Geltung beanspruchen, als der Lehrer ihnen einzuräumen für angemessen erachtet.

Für die zweite Auflage sind nur zwei Zusätze S. 30 und 57 hinzugekommen.

Über die leitenden Grundsätze habe ich mich in einem Begleitwort zu meiner Arithmetik ausgesprochen.

Cöln im Januar 1902.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt.

Erster Lehrgang.

	Seite
Vorwort	v
§ 1. Vorbegriffe	1
§ 2. Darstellung der Zahlen	8
§ 3. Buchstabenrechnung	14
§ 4. Fortsetzung	15
§ 5. Fortsetzung. Übungen	15
§ 6. Gleichungen. Andere Rechnungsarten	18
§ 7. Subtraktion	19
§ 8. Übungen	23
§ 9. Division	26
§ 10. Dezimalbrüche	30
§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten	35

Digitized by Google

Digitized by Google

Erster Lehrgang.

§ 1. Vorbegriffe.

1. Man bestimme die Summe der Zahlen von 1 bis 49 wie folgt:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
1 + & 2 + & 3 + & 4 + & 5 + & 6 + & 7 = & 28, \\
8 + & 9 + & 10 + & 11 + & 12 + & 13 + & 14 = & 77, \\
15 + & 16 + & 17 + & 18 + & 19 + & 20 + & 21 = & 126, \\
22 + & 23 + & 24 + & 25 + & 26 + & 27 + & 28 = & 175, \\
29 + & 30 + & 31 + & 32 + & 33 + & 34 + & 35 = & 224, \\
36 + & 37 + & 38 + & 39 + & 40 + & 41 + & 42 = & 273, \\
43 + & 44 + & 45 + & 46 + & 47 + & 48 + & 49 = & 322. \\
\hline
154 + & 161 + & 168 + & 175 + & 182 + & 189 + & 196 = & 1225.
\end{array}
$$

2. Ebenso bilde man die Summe aller Zahlen von 1 bis 16:

$$
\begin{array}{rrrrr}
1 + & 2 + & 3 + & 4 = & 10, \\
5 + & 6 + & 7 + & 8 = & 26, \\
9 + & 10 + & 11 + & 12 = & 42, \\
13 + & 14 + & 15 + & 16 = & 58. \\
\hline
28 + & 32 + & 36 + & 40 = & 136.
\end{array}
$$

3. Dieselbe Aufgabe löse man für die Summe aller Zahlen von 1 bis 25, indem man 5 wagerechte und 5 senkrechte Reihen bildet; ferner für die Summe aller Zahlen von 1 bis 36; von 1 bis 81; von 1 bis 64; von 1 bis 100.

4. Man bilde ebenso die Summe aller in den folgenden 5 wagerechten und senkrechten Reihen stehenden Zahlen:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
1 + & 3 + & 5 + & 7 + & 9 = & 25, \\
11 + & 13 + & 15 + & 17 + & 19 = & 75, \\
21 + & 23 + & 25 + & 27 + & 29 = & 125, \\
31 + & 33 + & 35 + & 37 + & 39 = & 175, \\
41 + & 43 + & 45 + & 47 + & 49 = & 225. \\
\hline
105 + & 115 + & 125 + & 135 + & 145 = & 625.
\end{array}
$$

Digitized by Google

5. Ebenso verfahre man für die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen, indem man 4, 6, 7, 8 u. s. w. wagerechte und senkrechte Reihen bildet.

6. Ebenso verfahre man für die folgenden Reihen:

[1] a) 1 + 6 + 11 + 16
12 + 15 + 2 + 5
14 + 9 + 8 + 3
7 + 4 + 13 + 10.

b) 2 + 16 + 9 + 7
13 + 3 + 6 + 12
8 + 10 + 15 + 1
11 + 5 + 4 + 14.

c) 1 + 7 + 13 + 19 + 25
14 + 20 + 21 + 2 + 8
22 + 3 + 9 + 15 + 16
10 + 11 + 17 + 23 + 4
18 + 24 + 5 + 6 + 12.

d) 3 + 6 + 17 + 25 + 14
9 + 18 + 21 + 12 + 5
20 + 24 + 13 + 1 + 7
22 + 15 + 4 + 8 + 16
11 + 2 + 10 + 19 + 23.

e) 13 + 36 + 2 + 11 + 33 + 16
6 + 14 + 34 + 31 + 17 + 9
35 + 4 + 15 + 18 + 7 + 32
8 + 27 + 19 + 22 + 30 + 5
28 + 20 + 12 + 3 + 23 + 25
21 + 10 + 29 + 26 + 1 + 24.

f) 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + 46 + 55 + 64
48 + 39 + 62 + 53 + 12 + 3 + 26 + 17
60 + 51 + 42 + 33 + 32 + 23 + 14 + 5
21 + 30 + 7 + 16 + 49 + 58 + 35 + 44
31 + 24 + 13 + 6 + 59 + 52 + 41 + 34
50 + 57 + 36 + 43 + 22 + 29 + 8 + 15
38 + 45 + 56 + 63 + 2 + 9 + 20 + 27
11 + 4 + 25 + 18 + 47 + 40 + 61 + 54.

7.

[2]

1	2	4
8	16	13
7	14	9
18	17	15
11	3	6
12	5	10

8.

[3]

1	2	4	8
16	3	6	12
24	19	9	18
7	14	28	27
25	21	13	26
23	17	5	10
20	11	22	15

[1] Magische Quadrate. [2] Reste *mod* 19. [3] Reste *mod* 29.

Digitized by Google

9.

[1]

1	3	9	27	23	11	4
12	7	21	5	15	16	19
28	26	20	2	6	18	25
17	22	8	24	14	13	10

10.

[2]

1	3	9	27	19
26	16	17	20	29
25	13	8	24	10
30	28	22	4	12
5	15	14	11	2
6	18	23	7	21

11.

[3]

1	2	4	8	16	32	27	17	34
31	25	13	26	15	30	23	9	18
36	35	33	29	21	5	10	20	3
6	12	24	11	22	7	14	28	19

13.

[5]

1	2	4	8	16
32	23	5	10	20
40	39	37	33	25
9	18	36	31	21

12.

[4]

7	8	15	23	38
20	17	37	13	9
22	31	13	2	14
16	30	5	35	40
34	33	26	18	3
21	24	4	28	32
19	10	29	39	27
25	11	36	6	1

14.

[6]

2	4	8	16	32	3
6	12	24	48	35	9
18	36	11	22	44	27
54	47	33	5	10	20
40	19	38	15	30	60
59	57	53	45	29	58
55	49	37	13	26	52
43	25	50	39	17	34
7	14	28	56	51	41
21	42	23	46	31	1

[1] Reste *mod* 29. [2] Reste *mod* 31. [3] Reste *mod* 37.
[4] Reste *mod* 41. [5] Quadratische Reste *mod* 41.
[6] Reste *mod* 61.

Digitized by Google

15.

[1]

1	4	16	3	12	48
9	36	22	27	47	5
20	19	15	60	57	45
58	49	13	52	25	39
34	14	56	41	42	46

16.

[2]

1	32	48	11
47	40	60	29
13	50	14	21

17.

[3]

1	3	9	27	20
60	58	52	34	41

18.

[4]

1	8	3	24	9
11	27	33	20	38
60	53	58	37	52
50	34	28	41	23

Anmerkung. Die letzten 12 Aufgaben eignen sich auch zur Einübung der Multiplikation für Kopfrechnung. So führt die letzte zu folgenden im Kopfe vorzunehmenden Rechnungen:

$8 \cdot 8 = 64$, $64 - 61 = 3$; $8 \cdot 24 = 192$, 192 durch 61 geteilt gibt 3 als Quotient und 9 als Rest; $8 \cdot 9 = 72$, 72 durch 61 geteilt gibt 1 als Quotient, 11 als Rest u. s. w.

Für die Ausführung der Addition merke man folgende praktische Regeln:

1) Die Ziffern sind deutlich zu schreiben, und zwar in guter Ordnung, so daſs Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern stehen u. s. w.

2) Beim Addieren der Ziffern gehe man an jeder einzelnen in gleichförmiger Bewegung vorüber und denke bei jeder diejenige Zahl, welche sie, zu der bereits erhaltenen Summe hinzugefügt, ergibt.

So hat man bei der Aufgabe f) S. 2 für die letzte senkrechte Zeile zu denken: 4, 11, 16, 20, 24 u. s. w. Niemals sage man: 4 und 7 ist 11, und 5 ist 16 u. s. w.

19. Man addiere wie oben reihenweise:

a)
$$\begin{aligned} &1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &36 + 49 + 64 + 81 + 100 \\ &121 + 144 + 169 + 196 + 225 \\ &256 + 289 + 324 + 361 + 400. \end{aligned}$$

[1] Quadratische Reste *mod* 61. [2] Fünfte Potenzreste *mod* 61.
[3] Sechste Potenzreste *mod* 61.
[4] Dritte Potenzreste (kubische Reste) *mod* 61.

Digitized by Google

b)
$$\begin{array}{rrrr} 1 + & 8 + & 27 + & 64 \\ 125 + & 216 + & 343 + & 512 \\ 729 + & 1000 + & 1331 + & 1728 \\ 2197 + & 2744 + & 3375 + & 4096 \\ 4913 + & 5832 + & 6859 + & 8000. \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrr} 1 + & 2 + & 4 + & 8 \\ 16 + & 32 + & 64 + & 128 \\ 256 + & 512 + & 1024 + & 2048 \\ 4096 + & 8192 + & 16384 + & 32768. \end{array}$$

20. Fragen zur Wiederholung:

Was heifst addieren? Wie nennt man Zahlen, welche addiert werden sollen? Wie heifst das Ergebnis der Addition? Nach welchem Grundsatz ist die Summe von der Anordnung der Summanden unabhängig? Welches ist das Zeichen der Addition?

Der Lernende beantworte diese Fragen in vollständigen Sätzen.

Man berechne:

2372	6498	2372
6498	2372	6498
18976	12996	14232
21348	45486	9488
9488	19494	21348
14232	12996	18976
15413256	15413256	15413256

Man verwende grofse Sorgfalt auf Schreibung der Ziffern und richtige Anordnung der Einzelprodukte. Anfänglich schreibt der Lehrer jede Aufgabe und die volle Ausführung an die Schultafel. Die Schüler sind sofort mit der Neunerprobe (Arithmetik S. 79) bekannt zu machen. Keine Lösung darf ohne Anstellung derselben zugelassen werden.

22. Man berechne nach mehrfacher Ausführung, wie sie unter 21. gezeigt ist, folgende Multiplikationsaufgaben:

a) $169 \cdot 88209$; b) $1296 \cdot 205209$; c) $1024 \cdot 38025$;
d) $60025 \cdot 223729$; e) $159201 \cdot 249001$; f) $32768 \cdot 59049$.

23. Welches Multiplikationsgesetz ergibt sich aus diesen Beispielen?

24. Wie kann man folgende Aufgaben in Worte fassen?

a) $2\,(9 + 16 + 25 + 36 + 49)$; b) $3\,(1 + 8 + 27 + 64)$;
c) $(4 + 5 + 6)\,(3 + 7 + 9 + 11)$;
d) $6 + 7\,[3 + 8\,(9 + 6 + 1) + 4\,(7 + 3 + 2)]$.

Digitized by Google

Antwort für die letzte Aufgabe: Die Zahlen 7, 3, 2 sollen addiert und ihre Summe soll mit 4 multipliziert werden. Dann sollen die Zahlen 9, 6, 1 addiert und ihre Summe soll mit 8 multipliziert werden. Beide Produkte sollen addiert und das Ergebnis zu 3 addiert werden. Diese zuletzt gewonnene Summe soll mit 7 multipliziert und zu 6 addiert werden. Das Endergebnis ist 1259.

25. Wie faſst man die Aufgabe $4\,(3 + 2)$ in Worte? Zu welchem Ergebnis gelangt man? $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$ liefert dasselbe Ergebnis. Man verfahre ebenso für folgende Aufgaben:

a) $2\,(1 + 4 + 9 + 16 + 25)$; b) $3\,(1 + 3 + 5 + 7 + 9)$;
c) $4\,(1 + 4 + 7 + 10 + 13)$; d) $(4 + 6 + 8) \cdot 2$;
e) $3\,(1 + 9 + 10 + 8)$; f) $7\,(2 + 4 + 6 + 4 + 2)$.

Welches Multiplikationsgesetz ergibt sich aus diesen Beispielen?

26. Wie lassen sich folgende Aufgaben in Worte fassen:
$2 \cdot (4 \cdot 5)$; $(4 \cdot 5) \cdot 2$; $(4 \cdot 2) \cdot 5$; $5 \cdot (4 \cdot 2)$; $4 \cdot (5 \cdot 2)$?

Welchen Schluſs ziehen wir aus der Gleichheit der Endergebnisse? Man berechne, nachdem man die Aufgaben zunächst in Worte gefaſst hat:

$$[(3 \cdot 4) \cdot 6] \cdot (9 \cdot 2)$$
$$[(3 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 4)] \cdot 2$$
$$\{[(2 \cdot 6) \cdot 4] \cdot 3\} \cdot 9.$$

Ähnliche Aufgaben sind auch in gröſseren Zahlen auszurechnen, z. B. $(258 \cdot 364) \cdot 126 = (126 \cdot 364) \cdot 258$.

a)
$$\begin{array}{r} 258 \\ 364 \\ \hline 93912 \\ 126 \\ \hline 11832912 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 126 \\ 364 \\ \hline 45864 \\ 258 \\ \hline 11832912 \end{array}$$

Darf man bei einem Produkte, welches aus mehreren Faktoren besteht, die Klammern weglassen, wenn man nur den Wert, nicht aber zugleich die Entstehung des Produkts angeben will?

27. Wie multipliziert man eine Zahl mit 30, 300, 3000?

Anleitung. $7 \cdot 300 = 7 \cdot 3 \cdot 100$; $712 \cdot 1500 = 712 \cdot 15 \cdot 100$; $27\,000 \cdot 2640 = 27 \cdot 1000 \cdot 264 \cdot 10$.

Digitized by Google

28. Wie multipliziert man zwei Zahlen miteinander, welche beide auf eine Anzahl Nullen ausgehen? Wie multipliziert man eine durch 4 teilbare Zahl mit 25? — $25 \cdot 24 = 25 \cdot 4 \cdot 6 = 100 \cdot 6$. Wie multipliziert man jede beliebige Zahl durch Kopfrechnung mit 25?

29. Wie heifst das (dritte) Multiplikationsgesetz, welches sich aus den vorigen Aufgaben ableiten läfst?

30. Inwiefern beruht die gewöhnliche Methode, mehrstellige Zahlen miteinander zu multiplizieren, auf der Anwendung des zweiten und dritten Multiplikationsgesetzes?

Anleitung. $126 \cdot 364 = 126\,(300 + 60 + 4)$
$= 126 \cdot 3 \cdot 100 + 126 \cdot 6 \cdot 10 + 126 \cdot 4.$

31. Als praktische Regel merke man bei Ausführung der Multiplikation folgendes: $7962 \cdot 9$ sei zu multiplizieren. $9 \cdot 2 = 18$; man schreibe 8 und denke nur an 1; $9 \cdot 6 = 54$, 55; man schreibe 5 und denke an 5; $9 \cdot 9 = 81$, 86; man schreibe 6 und denke nur an 8; $9 \cdot 7 = 63$, 71. Man denke (sage) nicht: $9 \cdot 6$ ist 54 und 1 im Sinn macht 55, sondern kurz: $9 \cdot 6 = 54$, 55. Die Vorübung, gleich an das Ergebnis der Addition zu denken, ist schon oben (S. 4) eingeschärft worden. Ganz unerlaubt ist es, mit dem Multiplikator zu wechseln, also etwa im vorigen Beispiel zu denken (sagen): 7 mal 9 ist 63, statt: 9 mal 7 ist 63.

Nicht wenige Vorteile bietet die Kenntnis der grofsen Einmaleins, d. h. das Auswendigwissen der Produkte der Zahlen 11, 12, 13 u. s. w. bis 19 multipliziert mit 1, 2, 3 u. s. w. bis 9.

32. ***Wiederholungsfragen.*** Was heifst multiplizieren? Welche Zahl nennt man Multiplikator? Multiplikandus? Wie heifst das Ergebnis der Multiplikation? Welchen gemeinsamen Namen haben Multiplikator und Multiplikandus? Warum ist ein solcher gemeinsamer Name berechtigt? Wie multipliziert man eine Summe mit einer Zahl? Kann ein Produkt mehr als zwei Faktoren enthalten? Welchen Zweck hat es, bei einem aus mehreren Faktoren bestehenden Produkte einige derselben in Klammern einzuschliefsen?

Durch welche Zeichen deutet man die Multiplikation an?

$$6 \cdot 3;\ 7 \times 9;\ (4 + 5)\ (3 + 7).$$

33. Man bezeichnet $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ kurz durch 2^5. Man berechne:

Digitized by Google

a) 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2;
b) 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3;
c) 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4;
d) 1^5, 2^5, 3^5, 4^5;
e) 1^6, 2^6, 3^6.

34. Man berechne:
a) 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12};
b) 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6;
c) 8^2, 8^3, 8^4;
d) 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9, 3^{10}, 3^{11}, 3^{12};
e) 9^2, 9^3, 9^4, 9^5, 9^6;
f) 27^2, 27^3, 27^4;

35. Man zeige durch Ausrechnung die Richtigkeit der Gleichungen:

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^7;\ 3^4 \cdot 3^3 = 3^7;\ 4^4 \cdot 4^3 = 4^7;\ 5^4 \cdot 5^3 = 5^7;$$
$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8;\ 3^3 \cdot 3^5 = 3^8;\ 4^3 \cdot 4^5 = 4^8;\ 5^3 \cdot 5^5 = 5^8.$$

36. Wie werden die Zahlen 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30} mit Ziffern geschrieben? wie spricht man dieselben aus?

37. ***Wiederholungsfragen.*** Was ist eine Potenz? Was bedeutet der Ausdruck Grundzahl? Exponent? Was ist eine Gleichung? In welchem Zusammenhange stehen die drei Rechnungsarten: Addieren, Multiplizieren, Potenzieren? Welches Gesetz könnte man aus den Beispielen 35. entnehmen?

38. Die folgenden Zahlen heifsen Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Durch welche Eigenschaft unterscheiden sie sich von allen anderen Zahlen zwischen 4 und 30? Welche Primzahlen liegen zwischen 40 und 50? zwischen 50 und 60? Warum sind folgende Zahlen keine Primzahlen: 51, 57, 87, 91, 119, 133, 161, 169, 203, 217, 221, 247, 259, 287, 289, 299, 301, 323, 343, 361, 377, 403?

39. Wie zeigt man, dafs 67 keinen Teiler besitzt aufser der Einheit? Wieviel Proben hat man anzustellen?

Auch 401 ist eine Primzahl. Wie zeigt man dies? Wieviel Proben sind anzustellen?

§ 2. Darstellung der Zahlen.

1. Man stelle das umgekehrte Einmaleins auf, d. h. man zerlege jede Zahl von 1 bis 100 in Produkte von Primzahl-

Digitized by Google

potenzen. Welche Primzahlen des ersten Hunderts schliefsen rechts mit 1? mit 3? mit 7? mit 9? Man gebe schriftlich die Zerlegung aller mit 2 schliefsenden Zahlen des ersten Hunderts; ebenso der mit 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1 schliefsenden Zahlen. Wie verteilen sich die Primzahlen auf diese 10 Klassen? wie auf die einzelnen Dekaden?

2. Was wird aus einem Produkte, wenn ein Faktor desselben null ist? Viertes Multiplikationsgesetz.

3. Es ist:

$$1 \cdot 100 = 1 \cdot 99 + 1, \qquad 4 \cdot 100 = 4 \cdot 99 + 4,$$
$$2 \cdot 100 = 2 \cdot 99 + 2, \qquad 7 \cdot 100 = 7 \cdot 99 + 7,$$
$$3 \cdot 100 = 3 \cdot 99 + 3, \qquad 9 \cdot 100 = 9 \cdot 99 + 9.$$

$$(1) \qquad a \cdot 100 = a \cdot 99 + a.$$

Welche Bedeutung hat hier der Buchstabe a?

Welche Regel kann man statt der Gleichung (1) aussprechen? Ebenso beweise man durch Zahlenbeispiele die Richtigkeit der Regeln:

$$a \cdot 1000 = a \cdot 999 + a; \quad b \cdot 10\,000 = b \cdot 9999 + b.$$

4. Welche Zahlen N erhält man, wenn man in der Gleichung $N = 8a + 1$ dem Buchstaben a der Reihe nach die Werte 0, 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 beilegt? Welche unter diesen Zahlen sind Primzahlen?

Man löse dieselbe Aufgabe für $N = 8a + 3$, $8a + 5$, $8a + 7$.

Welche gemeinsame Eigenschaft haben bezüglich ihrer Zerlegbarkeit die Zahlen von der Form $8a + 2$? $8a + 6$? Welche besondere Eigentümlichkeit besitzen die Zahlen $8a + 4$?

Welche Zahlen des ersten Hunderts sind durch die bisher benutzten Formen $8a + 1$, $8a + 2$, $8a + 3$, $8a + 4$, $8a + 5$, $8a + 6$, $8a + 7$ erreichbar? welche nicht? Welche Form besitzen die übrigen, nicht darstellbaren?

5. Man löse dieselben Aufgaben für $x = 6m + 1$, $6m + 2$, $6m + 3$, $6m + 4$, $6m + 5$.

6. Welche Primzahlen des ersten Hunderts haben die Form $4n + 1$? welche die Form $4n + 3$? Enthalten diese beiden Formen sämtliche ungeraden Zahlen?

Antwort durch Probieren, $n = 0, 1, 2, 3$ u. s. w.

7. Man bestimme durch Probieren sämtliche Primzahlen zwischen 1 und 400, welche die Form $24n + 1$ haben.

Digitized by Google

Anleitung. Die fraglichen Zahlen sind 1, 25, 49, 73 u. s. w. bis 385. Unter diesen sind die Primzahlen durch Probieren zu ermitteln.

8. Welche Zahlen von der Form $36n + 5$ zwischen 1 und 200 sind Primzahlen?

9. Wenn a eine ganze Zahl bedeutet, welche Zahlen des ersten Hunderts haben dann die Form $x = a^2 + 1$?

Antwort. 1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82.

Zerlegt man diese Zahlen in ihre Primfaktoren, so findet man aufser 2 nur solche von der Form $4n + 1$, keine von der Form $4n + 3$.

10. Welche Zahlen des zweiten und dritten Hunderts haben die Form $x = a^2 + 1$? Man zerlege dieselben in ihre Primfaktoren.

11. Welche Zahlen erhält man für x aus den Gleichungen:

$$x = a^2 + 2,\ x = a^2 + 3,\ x = a^2 + 4,\ x = a^2 + 5,$$

wenn a die Werte 0, 1, 2, 3 bis 20 durchläuft? Man zerlege die Zahlen x in ihre Primfaktoren.

12. Welche Zahlen des ersten Hunderts haben die Form $N = a^2 + b^2$, wenn a und b beliebige ganze Zahlen, null eingeschlossen, bedeuten?

Antwort. 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, 52, 58, 61, 64, 68, 72, 73, 74, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100.

13. Welche Zahlen von 1 bis 20 können durch die Form $N = a^2 + b^2 + c^2$ dargestellt werden, wenn a, b, c beliebige ganze Zahlen, nur nicht null sind?

Antwort. 3, 6, 9, 11, 12, 14, 17, 18, 19.

Die noch fehlenden Zahlen 7 und 15 haben weder die Form a^2 noch $a^2 + b^2$ noch $a^2 + b^2 + c^2$. Es kann gezeigt werden, dafs jede beliebige ganze Zahl sich als Summe von 4 oder weniger Quadratzahlen darstellen läfst. Dabei sind für Zahlen von der Form $8n + 7$ immer 4 Quadratzahlen erforderlich.

Beispiele.

$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 1 + 1 + 4, \\ 15 &= 1 + 1 + 4 + 9, \\ 23 &= 1 + 4 + 9 + 9, \\ 31 &= 4 + 9 + 9 + 9, \\ 39 &= 1 + 4 + 9 + 25. \end{aligned}$$

14. Welche Zahlen erhält man, wenn in der Gleichung $x = a^3 + 1$ für a alle Zahlen von 0 bis 10 eingesetzt werden?

Digitized by Google

Man zerlege dieselben in ihre Primfaktoren und stelle erfahrungsmäfsig fest, dafs $a^3 + 1$ immer den Faktor $a + 1$ enthält.

15. Man löse dieselben Aufgaben für $a^3 + 8$, $a^3 + 27$, $a^3 + 64$. Dieselben enthalten der Reihe nach die Faktoren $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$.

16. Welche Zahlen N des ersten Tausends haben die Form $N = a^3 + b^3$, wenn a und b beliebige ganze Zahlen bedeuten, null ausgeschlossen? — Jede Zahl $a^3 + b^3$ ist durch $a + b$ teilbar. Man bestätige dies erfahrungsmäfsig.

17. Welche Zahlen von 1 bis 10000 haben die Form

$$N = a^4 + 2b^4?$$

18. Welche Zahlen der ersten Billion haben die Form $N = a^a$?

Antwort. 1, 4, 27, 256 u. s. w., im ganzen 11 Zahlen.

19. Welche Zahlen des ersten Hunderts haben die Form $a^2 b$, wenn a und b zwei verschiedene Primzahlen, 1 ausgeschlossen, bedeuten?

Antwort. 12, 18, 20 u. s. w., im ganzen 15 Zahlen.

20. Welche Zahlen des ersten Tausends haben die Form $a^3 b^4$, wenn a und b gleiche Bedeutung haben wie in Aufgabe 19?

Antwort. 648 und 432.

21. Welche Zahlen des ersten Tausends haben die Form $N = a^2 b^2 c^3$, wenn a, b, c verschiedene Primzahlen, die Einheit ausgeschlossen, bedeuten?

22. Welche Zahlen erhält man, wenn man in der Form

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2$$

den Buchstaben a, b, c alle Werte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nach und nach beilegt?

23. Welche Form kann man dem Ausdrucke

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4$$

mit Hülfe der 3. und 4. Aufgabe dieses Paragraphen erteilen?

Antwort.
$$a + b + c + d + e + 9\,(b + 11\,c + 111\,d + 1111\,e).$$

Man bilde hierzu zehn Beispiele.

Anleitung. $a = 7$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 6$.

$$62347 = 22 + 9\,(4 + 33 + 222 + 6666).$$

24. Welchen Rest gibt eine Zahl bei der Teilung durch 9? Wann ist eine Zahl durch 9 teilbar?

Digitized by Google

25. Gelten die Schlüsse aus den Aufgaben 3, 4, S. 9; 23, S. 11, auch für die Zahl 3? Wann ist eine Zahl durch 3 teilbar? Wann ist eine Zahl durch 3, aber nicht durch 9 teilbar?

26. Welche Multiplikationsgesetze kamen in Aufgabe 23, S. 11, zur Anwendung? Wurde auch das dritte angewandt?

27. Man überzeuge sich von der Richtigkeit der Gleichungen: $10 = 2 \cdot 5$, $10^2 = 2^2 \cdot 5^2$, $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$, $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$, $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$.

Ist vielleicht $10^n = 2^n \cdot 5^n$ für jedes weitere ganzzahlige n eine richtige Gleichung?

28. Man bilde zu jeder der folgenden Gleichungen drei Beispiele und überzeuge sich von ihrer Richtigkeit:

$$N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4;$$
$$N = a + 10b + 4\ (25c + 250d + 2500e);$$
$$N = a + 10b + 100c + 8\ (125d + 1250e).$$

Anleitung. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$.
$54321 = 21 + 4 \cdot 13575 = 321 + 8 \cdot 6750$.

29. Wann ist eine Zahl durch 2, 4, 8, 16 teilbar? wann durch 5, 25, 125?

30. Wann ist eine Zahl durch 6, 12, 24, wann durch 18, 36 teilbar?

31. Es mögen $a, b, c, d \ldots$ verschiedene Primzahlen, die Einheit ausgeschlossen, bedeuten; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien beliebige ganze Zahlen. Dann kann (Aufgabe 1, S. 8) jede beliebige Zahl in die Form gesetzt werden: $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ und zwar, wie gezeigt werden kann, jede Zahl nur auf eine einzige Art. So ist $72 = 2^3 \cdot 3^2$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $6517 = 7^3 \cdot 19$. Diese drei Zahlen haben also die Formen a^3b^2, a^3bc, a^3b. Wieviel verschiedene Formen zeigen die Zahlen 61, 62, 63 u. s. w. bis 70?

Antwort. 5 Formen, nämlich a, ab, a^2b, abc, a^6, in Worten: 2 Primzahlen, 2 Produkte aus zwei verschiedenen Primzahlen, 2 Quadrate einer Primzahl multipliziert mit einer andern, 2 Produkte aus je drei verschiedenen Primzahlen, eine 6. Potenz einer Primzahl, im ganzen 10 Zahlen.

32. Man löse dieselbe Aufgabe für die Dekaden 41 bis 50, 91 bis 100, 101 bis 110, 130 bis 139 u. s. w.

33. Man erkläre folgende Rechnung:

$$7\ (8 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3)$$
$$= 56 + 14 \cdot 10 + 35 \cdot 10^2 + 28 \cdot 10^3.$$

Welche Multiplikationsgesetze sind dabei angewandt worden?

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{rl} 56 &= 6 + 5 \cdot 10 \\ 14 \cdot 10 &= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2 \\ 35 \cdot 10^2 &= 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 \\ 28 \cdot 10^3 &= 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 \end{array}\right\} +$$

$$6 + 9 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4;$$

$$11 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^3 + 10^4.$$

Ergebnis. $6 + 9 \cdot 10 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4$.

Welche Gesetze sind hier angewandt worden?

Man multipliziere jetzt $7 \cdot 4528 = 31\,696$ und weise jeden Schritt dieser Rechnung in dem vorhergehenden nach.

34. Der Lernende erkläre die folgende Rechnung und nenne bei jedem Schritte das betreffende Gesetz:

$$\begin{array}{rl} & 4\,(2 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3) \\ + & 3\,(\quad 2 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4) \\ + & 9\,(\qquad\quad 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5) \\ = & \quad 8 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 \\ & \quad + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4 \\ & \qquad + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^6 \end{array}$$

$$= \quad 8 + 8 \cdot 10 + 13 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^6;$$

$$13 \cdot 10^2 = 10^2\,(3 + 1 \cdot 10) = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3,$$
$$16 \cdot 10^3 = 10^3\,(6 + 1 \cdot 10) = 6 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4;$$

Ergebnis. $934 \cdot 1282 = 1\,197\,388$.

Man führe jetzt diese gewöhnliche Zahlenmultiplikation aus und weise jeden Schritt als in vorstehender Rechnung enthalten nach.

35. Der Lernende bilde drei Beispiele ähnlicher Art. Multiplikator und Multiplikandus seien beide zweistellige, dreistellige, vierstellige Zahlen. Die Behandlung der Null ergibt sich aus folgendem Beispiel:

$$\begin{array}{rl} & 2\,(1 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4) \\ + & 5\,(\quad 1 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5) \\ + & 4\,(\qquad\quad 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^6) \\ = & \quad 2 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^4 \\ & \quad + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^6 \\ & \qquad + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7 \end{array}$$

$$= \quad 2 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7;$$

$$452 \cdot 31\,151 = 14\,080\,252.$$

Digitized by Google

§ 3. Buchstabenrechnung.

1. Wie läfst sich die Gleichung

(2) $(2x + 3)(5x + 4) = 10x^2 + 23x + 12$

in Worten ausdrücken? Wie läfst sich die in (2) geforderte Multiplikation durch die Schreibung mit der gewöhnlichen Zahlenmultiplikation in Übereinstimmung bringen? Welche Multiplikationsgesetze treten dabei in Wirksamkeit?

2. Man bestätige durch eine Anzahl (5) Zahlenproben die Richtigkeit der Gleichung (2).

Anleitung. $x = 1;\ 5 \cdot 9 = 10 + 23 + 12 = 45.$
$x = 3;\ 9 \cdot 19 = 90 + 69 + 12 = 171.$

3. Dieselben Fragen wie unter 1. sind zu beantworten und eine Anzahl Zahlenproben anzustellen für folgende Gleichungen:

a) $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2;$
b) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6;$
c) $(x + 4)(x + 6) = x^2 + 10x + 24;$
d) $(2x + 1)(3x + 1) = 6x^2 + 5x + 1;$
e) $(4x + 2)(3x + 1) = 12x^2 + 10x + 2;$
f) $(x + 7)(x + 7) = x^2 + 14x + 49;$
g) $(x + 8)(x + 8) = x^2 + 16x + 64;$
h) $(x + 9)(x + 9) = x^2 + 18x + 81;$
i) $(x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81;$
k) $(2x + 3)(2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2.$

4. Auszurechnen und mit Zahlenproben zu bestätigen:

a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6;$

b) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24;$

c) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) = x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120.$

5. Man bestätige durch andere Anordnung der Faktoren an den Aufgaben unter 3. das erste, unter 4. das dritte Multiplikationsgesetz.

6. Auszurechnen und mit Zahlenproben zu bestätigen:

a) $(3x + 2)(4x + 3)(5x + 4) = 60x^3 + 133x^2 + 98x + 24;$

b) $5\,(3x + 2)(4x + 3) + 4\,(3x + 2)(5x + 4) + 3\,(4x + 3)(5x + 4) = 180x^2 + 266x + 98.$

7. Ebenso:

a) $(x + 1)(x + 1)(x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3;$
b) $(x + 2)(x + 2)(x + 2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3;$

Digitized by Google

c) $(x + 1)(x + 1)(x + 1)(x + 1)$
$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)^4$;
d) $(x + 1)^3 + 2(x + 1)^2 + 5(x + 1) = x^3 + 5x^2 + 12x + 8$;
e) $(x + 1)(x + 1)^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$.

§ 4. Fortsetzung.

1. Wie beweist man das erste Multiplikationsgesetz? Auf welchen Grundsatz hat man sich dabei zu berufen? Man führe den Beweis, indem man sich statt der a wagerechten und b senkrechten Reihen zur Veranschaulichung a Urnen bedient, deren jede b Kugeln enthält.

2. Wie beweist man das zweite Multiplikationsgesetz?

Man weise die Anwendung desselben bei der Zahlenmultiplikation nach (S. 12 und 13), bei dem „Heraussetzen" („Herausklammern", „Herausschreiben") (S. 11, Nr. 23; S. 12, Nr. 28, Nr. 33). Warum ist $5a + 9a = 14a$?

3. Wenn a, b, p ganze Zahlen sind, welchen Satz drückt dann die Gleichung aus:

(3) $$ap + bp = (a + b)p?$$

Antwort. Wenn von zwei Zahlen jede den Faktor p enthält, so enthält die Summe der Zahlen denselben Faktor. Dies ist ein für die Teilbarkeit der Zahlen wichtiges Gesetz.

4. Wie beweist man das dritte Multiplikationsgesetz für 3 Faktoren? für 4 Faktoren? Auf wieviel verschiedene Arten liefsen sich die Multiplikationsaufgaben S. 14, 3. k); 4. a), b), c) lösen?

Antwort. Auf 2, 6, 24, 120 Arten.

5. Welche Klammern sind bei der Multiplikation überflüssig? Wie wird ein Produkt mit einer Zahl multipliziert? Welcher wesentliche Gegensatz wird bemerkbar, wenn einerseits eine Summe, anderseits ein Produkt mit einer Zahl multipliziert wird? Mit welcher Zahl hat man abc multipliziert, wenn man jeden Faktor mit 10 multipliziert?

6. Warum ist $a \cdot 1$ und $1 \cdot a$ nicht von a verschieden?

Ist ein Produkt ganzer Zahlen jedesmal gröfser als jeder Faktor einzeln genommen? Wie heifst das vierte Multiplikationsgesetz?

§ 5. Fortsetzung. Übungen.

1. Man berechne:

(4) $$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Welchen Wortlaut hat dieses Gesetz?

Digitized by Google

1. Man berechne der Reihe nach durch fortgesetzte Multiplikation mit $1 + x$ die Potenzen:

$$(1 + x)^2,\ (1 + x)^3,\ (1 + x)^4,\ \ldots\ \text{bis}\ (1 + x)^{10}.$$

Die Lösung ist in der folgenden (Pascalschen) Tafel enthalten:

				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
	6		15		20		15		6	
1		7		21		35		35		21		7		1
	8		28		56		70		56		28		8	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1
	10		45		120		210		252		210		120		45		10	
1																		1.

3. Man zeige, dafs $x^2 \cdot x^3 = x^5$, $x^2 \cdot x^4 = x^6$, $x^5 \cdot x^4 = x^9$, $x^2 \cdot x^9 = x^{11}$ ist. Welche allgemeine Regel folgt hieraus?

4. Man berechne $(1 + x)^7$ durch die Multiplikationen $(1 + x)^3\,(1 + x)^4$; $(1 + x)^2\,(1 + x)^5$. Zahlenbeispiel $x = 3$.

5. Man berechne $(1 + x)^8$ durch die Multiplikation $(1 + x)^4\,(1 + x)^4$. Zahlenbeispiel $x = 2$.

6. Man berechne $(1 + 2x + x^2)^2$; $(1 + 2x + x^2)^3$; $(1 + 2x + x^2)^4$; $(1 + 2x + x^2)^5$. Kennen wir die Ergebnisse?

7. Man berechne $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)^2$; $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)^3$. Kennen wir die Ergebnisse?

8. Ebenso ist zu berechnen $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b + c)^2$, $(a + b + c)^3$.

9. Man berechne $(a + b + c)^3$ und setze im Ergebnisse $a = 1$, $b = 2x$, $c = x^2$. Welches Ergebnis erhält man nach gehöriger Ordnung?

10. Man berechne $(a + b + c + d)^2$ und setze im Ergebnisse $a = 1$, $b = 3x$, $c = 3x^2$, $d = x^3$.

11. Übungen zur Formel:

(5) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$a = 20,\ b = 1;\ 21^2 = 400 + 40 + 1 = 441,$
$a = 20,\ b = 2;\ 22^2 = 400 + 80 + 4 = 484,$
$a = 20,\ b = 3;\ 23^2 = 400 + 120 + 9 = 529,$
$a = 20,\ b = 4;\ 24^2 = 400 + 160 + 16 = 576,$
$a = 20,\ b = 5;\ 25^2 = 400 + 200 + 25 = 625.$

Digitized by Google

Man berechne ebenso: 61^2, 62^2, 63^2, 64^2, 65^2,
71^2, 72^2, 73^2, 74^2, 75^2,
81^2, 82^2, 83^2, 84^2, 85^2.

Ergebnisse. 3721, 3844, 3969, 4096, 4225,
5041, 5184, 5329, 5476, 5625,
6561, 6724, 6889, 7056, 7225.

Diese Aufgaben sind zuerst schriftlich, dann aber auch durch Kopfrechnung zu lösen.

12. Man berechne schriftlich: 68^2, 48^2, 88^2, 99^2, 98^2, 97^2, und zwar zuerst nach der Formel, dann durch gewöhnliche Zahlenmultiplikation.

13. Desgleichen: 58^2, 59^2, 38^2, 69^2, 79^2, 89^2.

Ergebnisse. 3364, 3481, 1444, 4761, 6241, 7921.

14. Übungen zur Formel:

(6) $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Man berechne schriftlich nach dieser Formel und durch gewöhnliche Multiplikation:

11^3, 12^3, 13^3, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3, 19^3, 21^3, 22^3, 23^3, 24^3, 31^3, 32^3, 33^3, 34^3, 41^3, 51^2, 61^3, 101^3, 102^3, 201^3.

Ergebnisse. 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 9261, 10648, 12167, 13824, 29791, 32768, 35937, 39304, 68921, 132651, 226981, 1030301, 1061208, 8120601.

Beispiel. $a = 50$, $b = 4$.

$$\left.\begin{array}{rr} a^3 = & 125000 \\ 3a^2b = & 30000 \\ 3ab^2 = & 2400 \\ b^3 = & 64 \end{array}\right\} + \qquad \begin{array}{l} 54 \cdot 54 = 2916, \\ 2916 \cdot 54 = 157464. \end{array}$$

$$54^3 = 157464.$$

15. Man berechne $127^2 = 14129$ nach Formel (5).

Lösung. $a = 100$, $b = 27$; es wird $a^2 + 2ab$ bestimmt. 27^2 wird dann wieder nach derselben Formel $a = 20$, $b = 7$ berechnet: (Ebenso 532^2.)

$$\left.\begin{array}{r} 10000 \\ 5400 \\ 400 \\ 280 \\ 49 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} 250000 \\ 32000 \\ 900 \\ 120 \\ 4 \end{array}\right\} +$$

$$127^2 = 16129. \qquad 283024 = 532^2.$$

Digitized by Google

16. Ebenso soll berechnet werden:

$$134^2,\ 144^2,\ 382^2,\ 509^2,\ 541^2.$$

Ergebnisse. 17 956, 20 736, 145 924, 259 081, 292 681.

17. Man berechne dieselben Beispiele nach der Formel für $(a + b + c)^2$.

18. Man berechne nach der Formel für $(a + b + c)^3$:

$134^3 = 2\,406\,104$; $245^3 = 14\,706\,125$; $621^3 = 239\,483\,061$.

* § 6. Gleichungen. · Andere Rechnungsarten.

1. Was versteht man unter einer Gleichung? Welche Gleichungen nennt man identische? Wie unterscheidet sich die Formel von der identischen Gleichung? Wie unterscheidet sich die identische Gleichung von der Bestimmungsgleichung? Wie werden unbekannte Gröfsen bezeichnet? wie bekannte allgemeine Gröfsen?

2. Man gebe die Erklärung der Begriffe: Subtrahieren, Minuend, Subtrahend, Rest.

3. Wie löst man durch Zählen die Aufgabe der Subtraktion? Kann die Aufgabe der Subtraktion immer gelöst werden, wenn man keine anderen Zahlen kennt als die bisher bekannten (positiven ganzen) Zahlen?

4. Man fasse die beiden Gleichungen $x + a = b$ und $x = b - a$ in Worte und weise dadurch nach, dafs die beiden dasselbe aussagen, folglich denselben Gedanken in verschiedener Schreibart enthalten.

5. Man gebe die Erklärung der Begriffe: Dividieren, Dividendus, Divisor, Quotient.

6. Wie löst man durch zweckmäfsiges (methodisches) Probieren die Aufgabe der Division? Ist die Aufgabe der Division immer lösbar, wenn man keine anderen Zahlen kennt als die bisher eingeführten Zahlen?

7. Man fasse die beiden Gleichungen $a\,x = b$ und $x = \frac{b}{a}$ in Worte und weise dadurch nach, dafs beide dasselbe aussagen (fordern), folglich denselben Gedanken, wenn auch in verschiedener Schreibart, enthalten.

---

* Bei der ersten Durchnahme zu überschlagen, später oft zu wiederholen, und zwar auf allen Unterrichtsstufen.

Digitized by Google

8. Man erkläre die Begriffe: Potenz, Exponent, Grundzahl; Radizieren, Radikandus, Wurzelexponent, Wurzel.

9. Wie löst man die Aufgabe der Radikation durch zweckmäfsiges (methodisches) Probieren? Ist dieselbe immer lösbar oder vielmehr in der überwiegenden Mehrzahl der Beispiele unlösbar, wenn nur die bisherigen Zahlen zugelassen werden?

10. Man zeige, dafs die beiden Gleichungen $x^a = b$ und $x = \sqrt[a]{b}$, sobald man sie in Worte fafst, denselben Gedanken (dieselbe Forderung) ausdrücken, wenngleich in verschiedener Schreibart.

11. Welche Rechnungsarten heifsen algebraisch? Man nenne eine nichtalgebraische (transcendente) Aufgabe.

§ 7. Subtraktion.

1. Man löse die Gleichungen durch Abzählen (Fingerrechnen):

$$x + 4 = 7;\ x + 3 = 8;\ x + 5 = 12;\ x + 6 = 16.$$

Welche Forderungen enthalten diese Gleichungen? welche Forderungen die folgenden:

$$x = 7 - 4;\ x = 8 - 3;\ x = 12 - 5;\ x = 16 - 6?$$

2. Man nenne in den folgenden Gleichungen Minuend, Subtrahend, Rest:

$$3 = 7 - 4;\ 5 = 8 - 3;\ 7 = 12 - 5;\ 10 = 16 - 6.$$

3. Man fasse in Worte die Gleichungen:

$$(7) \qquad \left.\begin{aligned} (b - a) + a &= b, \\ a + (b - a) &= b. \end{aligned}\right\}$$

Man zeige die Richtigkeit derselben an folgenden Zahlenbeispielen:

$$b = 5,\ 10,\ 20,\ 34,\ 35,\ 100,$$
$$a = 3,\ \ 7,\ 14,\ 32,\ 25,\ \ 80.$$

Die senkrecht untereinander stehenden gehören jedesmal zusammen.

Also: „Subtrahiert man 7 von 10, so erhält man 3; fügt man zum Ergebnisse (dies wird durch die Klammer angedeutet) wieder 7 hinzu, so erhält man 10.“

Die Klammern sind überflüssig, werden daher fortgelassen.

Digitized by Google

$$b - a + a = b, \qquad a - a + b = b,$$
$$a + b - a = b, \qquad -a + b + a = b,*$$
$$b + a - a = b, \qquad -a + a + b = b.$$

4. Man zeige die Richtigkeit der Gleichungen:

(8) $b - (a + c) = (b - c) - a = (b - a) - c = b - a - c,$

welche zugleich in Worte zu fassen sind, an folgenden Zahlenbeispielen:

$$a = 1, \quad 4, \quad 15, \quad 7, \quad 14, \quad 20,$$
$$b = 12, \quad 16, \quad 30, \quad 80, \quad 28, \quad 100,$$
$$c = 7, \quad 3, \quad 5, \quad 3, \quad 4, \quad 30.$$

Die senkrecht untereinander stehenden gehören zusammen, also:

$12 - (1 + 7) = (12 - 7) - 1 = (12 - 1) - 7 = 12 - 1 - 7.$

5. Man berechne:

$$(4 - 3) + (3 - 2) + (2 - 1) = 4 + 3 + 2 - (3 + 2 + 1),$$
$$(5 - 4) + (4 - 2) + (2 - 1) = 5 + 4 + 2 - (4 + 2 + 1),$$
$$(16 - 13) + (12 - 8) + (6 - 5) = 16 + 12 + 6 - (13 + 8 + 5),$$
$$(17 - 9) + (19 - 3) + (15 - 6) = 17 + (19 - 9) + 15 - (3 + 6),$$
$$(20 - 8) + (34 - 2) + (16 - 13) + (17 - 7) = 20 - (8 + 2) + 34 - (13 + 7) + 16 + 17.$$

6. Man berechne auf möglichst zweckmäfsige Weise:

$(241 - 17) + (5 - 3) = 226,$
$(385 - 87) + (400 - 13) = 685,$
$(17 - 9) + (9 - 6) + (6 - 1) = 16,$
$(364 - 258) + (258 - 136) + (136 - 109) + 109 = 364.$

7. Man bestätige durch Zahlenproben die zuerst in Worte zu fassende Gleichung:

(9) $c - (b - a) = c - b + a = c + a - b.$

$$a = 1, \quad 2, \quad 7, \quad 8, \quad 19,$$
$$b = 3, \quad 4, \quad 9, \quad 14, \quad 38,$$
$$c = 5, \quad 6, \quad 13, \quad 24, \quad 70.$$

*8. Man führe den strengen Beweis der Gesetze:

$$b - a + a = b; \; c(b - a) = bc - ac; \; a + b - a = b;$$
$$(b - a)(d - c) = bd - ad + ac - bc;$$

---

* Bei der ersten Durchnahme zu übergehen.

Digitized by Google

$$b - (a + c) = (b - c) - a = (b - a) - c = b - a - c;$$
$$(b - a) + (d - c) + (f - e) = b + d + f - a - c - e;$$
$$c - (b - a) = c - b + a = c + a - b;$$
$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

9. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beiderseits Gleiches addiert oder subtrahiert. Man findet unter Anwendung früherer Gesetze und dieses Grundsatzes nachstehende Folgerungen: $x - a = b$.

Ich addiere beiderseits a und erhalte:

$$x - a + a = b + a.$$

Für die linke Seite tritt nach (7) x ein, also:

$$x = b + a.$$

Die Gleichung: $x - a = b$, hat die Lösung: $x = b + a$.

Man löse ebenso die Gleichungen:

$x - 4 = 8$; $x - 5 = 7$; $x - 6 = 13$; $x - 9 = 21$; $x - 10 = 17$.

10. Ebenso behandle man:

$$x + c = d;\ x + c - c = d - c;\ x = d - c.$$
$$x + 7 = 12;\ x + 9 = 14;\ x + 13 = 21;\ x + 1 = 40;$$
$$x + 2 = 17.$$

11. Der Ort A ist von dem Orte B a *km* entfernt. Ein Radfahrer ist von A ausgegangen und hat bereits auf der nach B führenden Straſse b *km* zurückgelegt. Welche Strecke hat er noch zu durchfahren? Auch durch Ansatz der Gleichung; $x + b = a$, zu lösen.

12. Ein Spaziergänger geht auf einem Wege b Meter vorwärts, dann a Meter zurück, darauf wieder d Meter vorwärts und endlich c Meter zurück. a und c sind nicht so groſs, daſs er hinter den Ausgangspunkt zurückgelangt; wieviel kommt er vorwärts? Hätte er dasselbe Endergebnis erzielen können, wenn er zuerst $(b + d)$ Meter vorwärts und dann $(a + c)$ Meter in entgegengesetzter Richtung durchschritten hätte? Man gebe andere Möglichkeiten an entsprechend S. 20 oben, etwa:

$$d - a + b - c;\ d - c + b - a;\ -c + b + d - a.$$

Durch Zahlenbeispiele zu erläutern:

$a =$ 500, 200, 780,
$b =$ 1240, 3000, 2400,
$c =$ 170, 500, 360,
$d =$ 400, 1200, 800.

Digitized by Google

13. Ein Kaufmann gewinnt bei einem Geschäfte a ℳ, bei einem zweiten das Doppelte und bei einem dritten das Fünffache der ersten Gewinnsumme. Hierauf verliert er in einem Monate an drei Geschäften hintereinander jedesmal b ℳ. Er findet jetzt bei der Abrechnung, dafs er mehr verloren als gewonnen hat. Wie hoch beläuft sich der Verlust?

$$a = 300,\ b = 1000;\ a = 250,\ b = 800.$$

14. Jemand bedarf zum Ankauf eines Grundstückes einer Barsumme von 3500 ℳ. Zur Beschaffung derselben steht ihm zunächst der Erlös aus einem Holzverkauf mit a ℳ, dann ein Sparkassenbuch zur Verfügung, welches auf den dreifachen Wert jenes Erlöses und noch 97 ℳ lautet. Die noch fehlenden Barmittel will er entleihen. Wie viel Geld mufs er leihen?

$$a = 400,\ 500,\ 600\ ℳ$$

15. Ein Knabe spielt mit zwei Schachteln, von denen die eine a, die andere b Kugeln enthält. Die erste ist die gröfsere; er bringt aus derselben soviel Kugeln in die zweite als schon in der zweiten sind; dann aus der zweiten dreimal soviel Kugeln in die erste als in der ersten geblieben sind; dann aus der ersten doppelt soviel in die zweite als nunmehr in der zweiten geblieben sind; endlich aus der zweiten fünfmal soviel in die erste als nun in der ersten geblieben sind. Wieviel Kugeln enthält nun die erste, wieviel die zweite Schachtel?

Antwort. $60a - 84b$ und $85b - 59a$.

Zahlenbeispiel. $a = 17,\ b = 12;\ a = 84,\ b = 59.$

16. Ein Landwirt besitzt in der Nähe seines Wohnhauses einen Garten, eine Wiese und einen Acker. Die drei Grundstücke haben sämtlich rechteckige Gestalt, und zwar hat der Garten a Meter Breite und ist dreimal so lang als breit. Die Wiese hat siebenfach die Länge und vierfach die Breite des Gartens. Der Acker kommt in der Längsrichtung gemessen der Breite der Wiese gleich, während seine Breite die doppelte Breite des Gartens um 15 Meter übertrifft. Wieviel Quadratmeter beträgt die Gröfse der drei Grundstücke? $a = 40$ Meter.

17. In einem rechteckigen Garten befindet sich ein gleichfalls rechteckig geformter Rasenfleck, dessen Länge die Breite um 7 m übertrifft. Die Breite des Gartens übertrifft die doppelte Länge des Rasenplatzes um 6 m, die Länge des Gartens die drei-

Digitized by Google

fache Breite des Gartens um 2 *m*. Wie groſs ist die nicht vom Rasen bedeckte Gartenfläche, wenn die Breite des Rasenfleckes *a m* beträgt?

Beispiel. $a = 11\ m$.

§ 8. Übungen.

(10) $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

(11) $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

(12) $$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Diese Formeln sind nebst (5) und (6) auswendig zu lernen.

2. ***Zahlenbeispiele.*** $19 \cdot 21$; $a = 20$, $b = 1$;
$18 \cdot 22$; $a = 20$, $b = 2$;
$33 \cdot 27$; $a = 30$, $b = 3$.

$96 \cdot 104$; $208 \cdot 192$; $32 \cdot 28$; $13 \cdot 7$; $81 \cdot 79$;
$88 \cdot 92$; $47 \cdot 53$; $326 \cdot 314$; $87 \cdot 93$; $16 \cdot 24$;
$57 \cdot 63$; $62 \cdot 58$; $91 \cdot 109$.

3. ***Zahlenbeispiele*** zu (11).

$a = 20$, $b = 1$; $19^2 = 400 - 40 + 1 = 361$;
$a = 20$, $b = 2$; $18^2 = 400 - 80 + 4 = 324$;
$a = 20$, $b = 3$; $17^2 = 400 - 120 + 9 = 289$;
$a = 30$, $b = 1$; $29^2 = 900 - 60 + 1 = 841$.

Ebenso zuerst schriftlich, dann mündlich zu berechnen:

39^2, 49^2, 59^2, 69^2, 79^2, 89^2, 99^2,
38^2, 48^2, 58^2, 68^2, 78^2, 88^2, 98^2,
37^2, 47^2, 57^2, 67^2, 77^2, 87^2, 97^2.

Ergebnisse. 1369, 1444, 1521, 2209, 2304, 2401, 3249, 3364, 3481, 4489, 4624, 4761, 5929, 6084, 6241, 7569, 7744, 7921, 9409, 9604, 9801.

4. ***Zahlenbeispiele*** zu (12).

$a = 20$, $b = 1$;

$$\left.\begin{array}{r} a^3 = 8000 \\ 3ab^2 = \quad 60 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} 3a^2b = 1200 \\ b^3 = \quad 1 \end{array}\right\} +$$

$$\left.\begin{array}{r} 8060 \\ 1201 \end{array}\right\} - \qquad 1201$$

$$19^3 = 6859$$

Digitized by Google

$a = 60,\ b = 4$:

$$\left.\begin{array}{r} a^3 = 216000 \\ 3ab^2 = 2880 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} 3a^2b = 43200 \\ b^3 = 64 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 218880 \\ 43264 \end{array}\right\} - \qquad 43264$$

$$56^3 = 175616$$

Ebenso: $39^3 = 59\,319$; $38^3 = 54\,872$; $37^3 = 50\,653$;
$49^3 = 117\,649$; $48^3 = 110\,592$; $47^3 = 103\,823$;
$59^3 = 205\,379$; $58^3 = 195\,112$; $57^3 = 185\,193$;
$69^3 = 328\,509$; $88^3 = 681\,472$; $97^3 = 912\,673$.

5. Auszuführen und durch Zahlenproben zu bestätigen:
$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Beispiele. $a = 5,\ b = 1$; $a = 7,\ b = 2$; $a = 9,\ b = 8$;
$a = 10,\ b = 2$; $a = 5,\ b = 4$; $a = 6,\ b = 3$.

Ausführung eines Musterbeispiels:

Formel. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Beispiel. $a = 23,\ b = 7$.

Ausführung:

$$\left.\begin{array}{r} a = 23 \\ b = 7 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} a^2 = 529 \\ b^2 = 49 \end{array}\right\} + \qquad \left.\begin{array}{r} a^3 = 12167 \\ b^3 = 343 \end{array}\right\} +$$

$$30 \qquad \left.\begin{array}{r} 578 \\ ab = 161 \end{array}\right\} - \qquad 12510$$

$$417 \qquad 30 \cdot 417 = 12510.$$

Hiernach sind drei weitere Beispiele zu bilden; a soll eine Zahl im Zahlenkreise 60 bis 100, b eine solche im Zahlenkreise 1 bis 10 sein.

6. Auszuführen und durch Zahlenproben zu bestätigen:
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,
$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Die Rechnung verläuft ähnlich der im vorigen Musterbeispiel durchgeführten.

$51^4 = 6\,765\,201$; $52^4 = 7\,311\,616$; $61^4 = 13\,845\,841$;
$69^4 = 22\,667\,121$; $68^4 = 21\,381\,376$; $79^4 = 38\,950\,081$.

7. Durch Anwendung der Formeln (5), (10), (11) und durch einfache Multiplikation zu berechnen:
$(a + b - c)^2$; $(a - b + c)^2$; $(-a + b + c)^2$.
$(a + b + c)(a + b - c)$; $(a - b + c)(-a + b + c)$.

Digitized by Google

Lösung für das letzte Beispiel:

1) $[c + (a - b)]\,[c - (a - b)] = c^2 - (a - b)^2$
$= c^2 - a^2 - b^2 + 2ab.$

2)
$$\left.\begin{array}{r} a - b + c \\ -a + b + c \end{array}\right\} \times$$
$$\begin{array}{r} -a^2 + ab - ac \\ ab - b^2 + bc \\ + ac - bc + c^2 \end{array} \Big\} +$$
$$-a^2 + 2ab - b^2 + c^2$$

8. Nach zwei verschiedenen Methoden (drittes Multiplikationsgesetz) auszuführen:

(13) $(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c)$
$= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$

$a = 9,\ 4,\ 6,\ 9,$
$b = 13,\ 3,\ 4,\ 7,$
$c = 11,\ 5,\ 3,\ 7.$

9. Auszuführen und das Ergebnis durch einfache Zahlenproben zu bestätigen:

$(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3);\ (x - 4)\,(x - 5)\,(x - 6);$
$(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)\,(x - 4)\,(x - 5)\,(x - 6).$

10. Desgleichen:

$$(1 + x)^2 + (1 - x)^2 = 2\,(1 + x^2),$$
$$(1 + x)^2 - (1 - x)^2 = 4x,$$
$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x\,(x^2 + 3y^2),$$
$$(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y\,(3x^2 + y^2),$$
$$(x + y)^4 + (x - y)^4 = 2\,(x^2 + y^2)^2 + 8x^2y^2,$$
$$(x + y)^4 - (x - y)^4 = 8xy\,(x^2 + y^2).$$

11. Nach zwei verschiedenen Methoden zu berechnen und durch Zahlenproben zu bestätigen:

$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$
$- 4x^5 + 3x^6 - 2x^7 + x^8;$
$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^3 = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4$
$- 18x^5 + 19x^6 - 18x^7 + 15x^8 - 10x^9 + 6x^{10}$
$- 3x^{11} + x^{12}.$

Welche Potenzen haben einen durch 3 nicht teilbaren Koeffizienten?

Digitized by Google

12. $(1-x)^4 + 4x(1-x)^3 + 6x^2(1-x)^2 + 4x^3(1-x) + x^4 = 1;$

$(1-x)^5 + 5x(1-x)^4 + 10x^2(1-x)^3 + 10x^3(1-x)^2 + 5x^4(1-x) + x^5 = 1;$

$(1+x)^3 - 3x(1+x)^2 + 3x^2(1+x) - x^3 = 1;$

$(1+x)^4 - 4x(1+x)^3 + 6x^2(1+x)^2 - 4x^3(1+x) + x^4 = 1;$

$(1+2x)^2 - 2x^2(1+2x) + x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$

13. $(x^3+y^3)^2 + 6xy(x+y)(x^3+y^3) + 9x^2y^2(x+y)^2 = (x+y)^6;$

$(x^3-y^3)^2 - 6xy(x-y)(x^3-y^3) + 9x^2y^2(x-y)^2 = (x-y)^6.$

14. $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2 = (a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a)^2.$

$a = 12,\ b = 9,\ c = 4.$

§ 9. Division.

1. Man löse durch zweckmäfsiges Probieren die Gleichungen:
$5x = 40;\ 7x = 35;\ 3x = 36;\ 9x = 108;\ 4x = 96.$

Welche Forderungen enthalten diese Gleichungen? welche Forderungen die folgenden:

$$x = \frac{40}{5};\ x = \frac{35}{7};\ x = \frac{36}{3};\ x = \frac{108}{9};\ x = \frac{96}{4}?$$

2. Man nenne in den folgenden Gleichungen Dividendus, Divisor, Quotient:

$$\frac{15}{5} = 3,\ \frac{21}{3} = 7,\ \frac{91}{7} = 13,\ \frac{144}{36} = 4.$$

3. Man fasse die Gleichung

$$a \cdot \frac{b}{a} = b \tag{14}$$

in Worte und zeige ihre Richtigkeit durch folgende Zahlenbeispiele:

$a = 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,$	$3 \cdot \frac{12}{3} = 12.$
$b = 12,\ 48,\ 15,\ 56,\ 18,\ 120.$	$3 \cdot 4 = 12.$

4. Man fasse in Worte und weise durch Zahlenbeispiele als richtig nach die Gleichung:

$$\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}. \tag{15}$$

$a = 4,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 36,$	$\frac{12}{4} = \frac{24}{8},$
$b = 12,\ 6,\ 15,\ 10,\ 18,\ 108,$	$3 = 3.$
$m = 2,\ 4,\ 8,\ 3,\ 4,\ 10.$	

Digitized by Google

5. Ebenso:

(16) $$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = \frac{b+c+d}{a}.$$

$a = 2,\ b = 4,\ c = 8,\ d = 6;$
$3,\quad 9,\quad 12,\quad 15;$
$7,\quad 21,\quad 35,\quad 14.$

Beispiel. $\frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{6}{2} = \frac{4+8+6}{2} = \frac{18}{2},$

$2 + 4 + 3 = 9.$

6. Desgleichen:

(17) $$\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}.$$

7. Ebenso:

(18) $$\frac{b}{a} + \frac{c}{d} = \frac{bd+ac}{ad}.$$

$b = 12,\ a = 6,\ c = 14,\ d = 2;$

$\frac{12}{6} + \frac{14}{2} = \frac{24+84}{12} = \frac{108}{12},$

$2 + 7 = 9.$

8. Man fasse in Worte und bestätige als richtig durch selbstgebildete Zahlenbeispiele:

(19) $$\frac{b}{a} - \frac{c}{d} = \frac{bd-ac}{ad};$$

(20) $$c + \frac{b}{a} = \frac{ac+b}{a}.$$

Kann jede ganze Zahl als Bruch mit beliebigem Nenner dargestellt werden?

(21) $$m\,\frac{b}{a} = \frac{mb}{a}.$$

(22) $$\frac{b}{a} : m = \frac{b}{ma}.$$

$b = 24,\ a = 2,\ m = 3;$
$b = 48,\ a = 4,\ m = 6;$
$b = 96,\ a = 16,\ m = 6.$

(23) $$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}.$$

$b = 12,\ d = 10;\ b = 24,\ d = 6;\ b = 100,\ d = 28;$
$a = 4,\ c = 5;\ a = 8,\ c = 3;\ a = 25,\ c = 4.$

(24) $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

$a = 48,\ c = 39;\ a = 32,\ c = 10;\ a = 96,\ c = 28;$
$b = 2,\ d = 13;\ b = 8,\ d = 5;\ b = 12,\ d = 7.$

Digitized by Google

9. Ist die Aufgabe der Division unter allen Umständen lösbar, wenn man keine anderen Zahlen kennt als ganze Zahlen? Man erkläre die Begriffe: Bruch, Zähler, Nenner. Sind dieselben im Wesen von den Begriffen Quotient, Dividendus, Divisor verschieden? Vgl. auch § 10, 7, S. 31.

*10. Man führe die strengen Beweise der Sätze (14) bis (24).

11. Wie entfernt man Doppelbrüche?

Beispiele. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}$;

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{5}{7}\right)=\frac{21}{160};$$

denn

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{3-\frac{5}{7}}=\frac{70\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)}{70\left(3-\frac{5}{7}\right)}.$$

Hiernach sind drei weitere Beispiele zu bilden.

12. Wann ist ein Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht? Wann nennt man zwei Zahlen relative Primzahlen?

Man gebe diejenigen Zahlen an, welche relativ prim und kleiner als 12 sind.

Antwort. 1, 5, 7, 11.

Welche Zahlen sind kleiner als 18 und relativ prim zu 18?

Antwort. 1, 5, 7, 11, 13, 17.

Man mache dieselbe Aufstellung für die Zahlen 24, 30, 36, 40, 48, 50, 54.

13. Man vergleiche die beiden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ der Gröfse nach miteinander. — Da der erstere $\frac{8}{12}$, der zweite $\frac{9}{12}$ gleichkommt, so kann letzterer in zwei Teile $\frac{8}{12}+\frac{1}{12}$ derartig zerlegt werden, dafs der eine Teil gleich dem ersten Bruche ist. $\frac{3}{4}$ ist also gröfser als $\frac{2}{3}$.

Man vergleiche ebenso $\frac{5}{6}$ mit $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{23}$ mit $\frac{19}{25}$; $\frac{18}{35}$ mit $\frac{20}{37}$; $\frac{21}{16}$ mit $\frac{24}{19}$; $\frac{9}{11}$ mit $\frac{13}{15}$; $\frac{22}{7}$ mit $\frac{28}{13}$; $\frac{8}{9}$ mit $\frac{9}{10}$.

14. Was versteht man unter einem echten, was unter einem unechten Bruch? Man vergleiche die Brüche $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{9}$,

*) Bei der ersten Durchnahme zu übergehen.

Digitized by Google

$\frac{7}{10}$ ihrer Gröfse nach. Desgleichen die folgenden: $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{7}$. Bleibt der Wert eines Bruches somit unverändert, wenn man im Zähler und Nenner eine gleiche Zahl hinzufügt oder wegnimmt?

15. Jeder unechte Bruch kann in zwei Teile zerlegt werden, von denen der eine eine ganze Zahl, der andere ein echter Bruch ist. Für die ganze Zahl, welche in dieser Weise als Teil dem Werte des unechten Bruches $\frac{a}{b}$ entnommen werden kann, hat man das Zeichen $E\left(\frac{a}{b}\right)$. So ist

$$E\left(\frac{25}{3}\right) = 8,\ E\left(\frac{15}{8}\right) = 1,\ E\left(\frac{2a+1}{a}\right) = 2.$$

Man bestimme:

$$E\left(\frac{3a}{b}\right) \text{ für } b = 7 \text{ und } a = 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 8^2.$$

$$E\left(\frac{5a}{b}\right),\ E\left(\frac{6a}{b}\right) \text{ für dieselben Zahlen.}$$

16. Wie werden zwei beliebige Brüche der Gröfse nach miteinander verglichen? Wie wird ein unechter Bruch mit einer ganzen Zahl der Gröfse nach verglichen? Man vergleiche die Brüche

$$\frac{a}{b} \gtrless \frac{a+c}{b+c}.$$

Das Zeichen $\gtrless$ bedeutet: „gleich, gröfser oder kleiner".

Welcher Lehrsatz ergibt sich hieraus im Anschlusse an die Beispiele der Aufgabe 14, S. 28?

17. Man zeige, dafs das Produkt von zwei echten Brüchen kleiner ist als jeder der Faktoren.

Anleitung. Man beginne mit Zahlenbeispielen: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ Nun ist $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$, jeder Faktor für sich also gröfser als das Produkt.

18. Welchen Wert mufs man gemäfs der Erklärung der Division einem Bruche beilegen, dessen Zähler null, dessen Nenner eine von null verschiedene Zahl ist?

* 19. Wie kann man durch Teilung von Strecken die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{17}{9}$ darstellen? Wie stellt man die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ durch Teilung der Strecken 1 *m* und 3 *m* dar und zeigt mit Hülfe dieser Anschauung, dafs $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ist. Wie zeigt man

* Für spätere Wiederholungen. Bei erster Durchnahme zu übergehen.

Digitized by Google

mit Hülfe derselben Anschauung, dafs $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ ist? Man zeige mit Hülfe einer Zeichnung, dafs ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

* 20. Die Länge eines Rechtecks beträgt $\frac{3}{4}$ *m*, die Breite $\frac{2}{7}$ *m*. Man bestimme den Inhalt.

Lösung. Ich teile die Länge und Breite eines Quadratmeters in 28 gleiche Teile und zerlege die Figur durch Querlinien in $28 \cdot 28 = 784$ gleiche Quadrate. Die Länge des gegebenen Rechtecks zerfällt in 21, die Breite in 8 gleiche Teile und das Ganze durch Querlinien in $21 \cdot 8 = 168$ gleiche Quadrate. Jedes Quadrat ist $\frac{1}{784}$ *qm*, also das Rechteck $\frac{168}{784}$ *qm*.

Zu demselben Ergebnis führt die Multiplikation der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$. Denn $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{168}{784}$.

* 21. Wie kann man in ähnlicher Weise die Bruchregel

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

durch Anschauung beweisen?

22. Zwischen welche Brüche mit dem Nenner 11 fällt der Bruch $\frac{3}{7}$?

Antwort. Zwischen $\frac{4}{11}$ und $\frac{5}{11}$. Warum?

Zwischen welche Brüche mit dem Nenner 13 fällt $\frac{5}{8}$?

23. Man ordne die echten Brüche mit dem Nenner 11 zwischen die echten Brüche mit dem Nenner 17 ein.

Bemerkung. Bei Aufgaben des praktischen Lebens (Anwendung der Arithmetik) ist die Benennung der Zahlen zu beachten. Sind Dividend und Divisor gleichbenannt, so haben wir die Messung oder das Enthaltensein. Ist der Dividend benannt, der Divisor unbenannt, so handelt es sich um Teilung. Für die arithmetischen Gesetze ist diese Unterscheidung belanglos.

§ 10. Dezimalbrüche.

1. Man zeige die Richtigkeit folgender Entwicklungen:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5; \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 0{,}25;$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}125.$$

* Für spätere Wiederholungen. Bei erster Durchnahme zu übergehen.

Digitized by Google

Ebenso: $\frac{1}{16} = 0{,}0625$; $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{1}{25} = 0{,}04$.

2. Zwischen welchen Brüchen mit dem Nenner 100 liegen $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{4}{11}, \frac{6}{13}, \frac{9}{17}$?

3. Zwischen welchen Brüchen mit dem Nenner 1000 liegen $\frac{2}{3}, \frac{8}{17}, \frac{9}{19}, \frac{11}{23}, \frac{14}{29}$*, $\frac{2}{7}, \frac{3}{11}, \frac{4}{13}, \frac{5}{17}, \frac{7}{23}$?

4. Zwischen welchen Brüchen mit dem Nenner 100 000 liegen die Brüche $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$?

5. Wie wird ein gewöhnlicher Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt? Wann ist ein solcher Bruch geschlossen?

* Warum ist ein nicht geschlossener aus einem gewöhnlichen Bruche hervorgehender Dezimalbruch periodisch?

Antwort. Weil bei der Division durch den Nenner N nur $N - 1$ verschiedene Reste bleiben, also bei hinreichender Fortführung des Verfahrens einmal eine Wiederkehr stattfinden mufs. Die Periode zählt daher höchstens $N - 1$ Stellen.

6. Wie würde man praktisch zu verfahren haben, wenn man einen Bruch mit ziemlich grofsem Nenner in einen Dezimalbruch mit voller Periode entwickeln wollte?

Antwort. Man fertige für den Nenner N eine Tabelle der Vielfachen $1\,N$, $2\,N$, $3\,N$ u. s. w. bis $9\,N$ an und verfahre dann nach der gewöhnlichen Methode, Zahlen zu dividieren.

Beispiele. $\frac{6}{23}, \frac{7}{29}, \frac{36}{47}$.

7. Das Verfahren bei der gewöhnlichen Methode, zwei Zahlen durch einander zu dividieren, ist ein methodisches Probieren. Es beruht auf der vorerwähnten Tabelle und dem Satze

$$(25) \qquad \frac{a}{b} = c + \frac{a - bc}{b}.$$

Man zeige dies an Beispielen; b sei eine dreistellige, a eine fünfstellige Zahl. Inwiefern erspart die Anfertigung der Tabelle die Notwendigkeit weiteren Erratens und somit die Möglichkeit von Fehlgriffen?

8. Man entwickle in Dezimalbrüche: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}; \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}; \frac{1}{37}, \frac{2}{37}, \frac{9}{37}, \frac{18}{37}, \frac{19}{37}, \frac{36}{37}$.

---

* Bei der ersten Durchnahme zu übergehen.

Digitized by Google

Lösungen. 0,333 . . . 0,36 36 . . .
0,111 . . . 0,45 45 . . .
0,037 037 . . . 0,54 54 . . .
0,63 63 . . .
0,09 09 . . . 0,72 72 . . .
0,18 18 . . . 0,81 81 . . .
0,27 27 . . . 0,90 90 . . .

0,027 027 . . .; 0,054 054 . . .; 0,243 243 . . .;
0,486 486 . . .; 0,513 513 . . .: 0,972 972 . . .

9. Man entwickle desgleichen:

$$\frac{1}{41'}\ \frac{5}{41'}\ \frac{18}{41'}\ \frac{1}{271'}\ \frac{124}{271}.$$

Ergebnisse. 0,02439 . . .; 0,00369 . . .
0,12195 . . .; 0,45756 . . .
0,43902 . . .

10. Es ist $\frac{1}{7} = 0{,}142\,857 \ldots$

$\frac{1}{13} = 0{,}076\,923 \ldots$

Man fertige eine Tabelle an, welche die Dezimalbruchentwicklung aller echten Brüche mit den Nennern 7 und 13 enthält.

11. Man entwickle echte Brüche, deren Nenner sind 239, 4649, 73, 101, 137, 333 667, 9091, 9901, in Dezimalbrüche.

12. Man berechne

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{36} = \frac{59}{72}$$

durch Verwandlung der einzelnen Summanden und der Summe in Dezimalbrüche.

Lösung.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0{,}50000000 \\ \frac{1}{4} = 0{,}25000000 \\ \frac{1}{24} = 0{,}04166667 \\ \frac{1}{36} = 0{,}02777778 \end{array}\right\} +$$

$$0{,}8194444(5) = \frac{59}{72}.$$

Wie erklärt sich die Ungenauigkeit auf der letzten Dezimalstelle?

Digitized by Google

13. Ebenso berechne man:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32};$$

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{7^6} = \frac{823542}{705894}.$$

14. Man berechne die Reihe

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \ldots$$

und zwar soviel Glieder als bei fünfstelliger Rechnung berücksichtigt werden müssen.

Lösung.

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}000\,000 \\ 0{,}111\,111 \\ 0{,}012\,346 \\ 0{,}001\,372 \\ 0{,}000\,152 \\ 0{,}000\,017 \\ 0{,}000\,002 \end{array}\right\} +$$

$$1{,}125\,000 = \frac{9}{8}.$$

Ebenso:

$$1 - \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{13^3} + \frac{1}{13^4} - \ldots = \frac{13}{14};$$

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} - \ldots = \frac{7}{8};$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \ldots = \frac{3}{4}.$$

15. Man berechne bis auf 10 Dezimalen genau:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

Man findet bis auf 20 Stellen genau:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ \ldots$$

16. Man berechne bis auf 7 Dezimalstellen

$$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

für

$$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Ergebnisse. 0,405 4651; 0,287 6821; 0,223 1436; 0,182 3216.

17. Wie werden Dezimalbrüche multipliziert? Worin besteht die abgekürzte Multiplikation?

Digitized by Google

Beispiele.

$12{,}348 \cdot 7{,}1492 = 88{,}278$; $0{,}28571 \cdot 0{,}76923 = 0{,}21978$;
$0{,}34842 \cdot 22{,}341 = 7{,}7840$; $0{,}57142 \cdot 2{,}3077 = 1{,}3187$;
$1{,}7641 \cdot 3{,}5746 = 6{,}3060$.
$1{,}7320508^2 = 3$; $2{,}236068^2 = 5$; $3{,}1622777^2 = 10$;
$1{,}4142136 \cdot 3{,}6055513 = 5{,}0991095$;
$1{,}259922 \cdot 2{,}410142 = 3{,}036589$;
$1{,}4422496 \cdot 1{,}8171206 = 2{,}6207414$;
$1{,}5874011 \cdot 1{,}9129312 = 3{,}0365889$.

18. Wie werden Dezimalbrüche durcheinander dividiert? Worin besteht die abgekürzte Division?

Beispiele.

$4{,}242\,6407 : 1{,}732\,0509 = 2{,}449\,4897$;
$4{,}472\,1360 : 3{,}162\,2777 = 1{,}414\,2136$;
$4{,}582\,5757 : 2{,}645\,7513 = 1{,}732\,0508$;
$4{,}690\,4158 : 3{,}316\,6248 = 1{,}414\,2136$;
$4{,}898\,9795 : 3{,}464\,1016 = 1{,}414\,2136$;
$6{,}708\,2039 : 3{,}872\,9833 = 1{,}732\,0508$;
$3{,}659\,3057 : 1{,}912\,9312 = 1{,}912\,9312$;
$9{,}539\,3920 : 3{,}605\,5513 = 2{,}645\,7513$.

19. Man multipliziere gewöhnliche Brüche miteinander, verwandle dieselben sowie das Produkt in Dezimalbrüche und zeige die Übereinstimmung beider Multiplikationen.

$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{14}$ (fünf Dezimalen); $\frac{1}{24} \cdot \frac{12}{13} = \frac{1}{26}$;
$\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$; $\frac{1}{16} \cdot \frac{8}{25} = \frac{1}{50}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1}{3}$.

20. Man dividiere zwei gewöhnliche Brüche durcheinander, verwandle die Brüche und den Quotienten in Dezimalbrüche und zeige durch Ausführung der Division die Richtigkeit beider Divisionen.

$\frac{2}{7} : \frac{5}{13} = \frac{26}{35}$; $0{,}285714 : 0{,}384615 = 0{,}742857$.
$\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$; $\frac{9}{16} : \frac{25}{4}$; $\frac{17}{19} : \frac{5}{16}$; $\frac{8}{39} : \frac{7}{13}$.

21. ***Wiederholungsfragen.*** Was ist ein Dezimalbruch? Wie wird ein Dezimalbruch gelesen? Wie heifsen die Rechnungsregeln für Dezimalbrüche? Wie sind dieselben zu begründen? Wie hat man zu verfahren, um einen gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln? Wie ist dieses Verfahren zu be-

Digitized by Google

gründen? Wie verfährt man bezüglich der letzten Dezimalstelle, wenn man die Entwicklung abbricht? Worin bestehen die beiden abgekürzten Rechnungsarten? Wie dividiert man einen Dezimalbruch durch 10, 100, 1000 u. s. w.? Wie multipliziert man ihn mit diesen Zahlen? Wie unterscheidet sich durch den Anblick ein echter von einem unechten Dezimalbruch? Welches Gröfsengesetz gilt für das Produkt zweier echten Dezimalbrüche?

22. Man verwandle nachstehende periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche:

0,21(21) . . .; 0,02(02) . . .; 3,12(312) . . .; 15,27(1527) . . .; 61,2(612) . . .; 0,031(031) . . .; 0,031(31) . . .

Die Perioden sind eingeklammert.

Desgleichen:

0,(1966527) . . .; 1,(2475) . . .; 0,(02583) . . .; 0,(17073) . . .

Ferner:

0,(123456789) . . .; 0,(1331) . . .; 0,(123) . . .; 0,(246) . . .; 0,1(246) . . .; 0,3(12) . . .; 0,2(13) . . .

Anmerkung. Um mit Sicherheit angeben zu können, ob die erhaltenen gewöhnlichen Brüche schon ihren einfachsten Ausdruck besitzen, mufs man die Primzahlzerlegung der Zahlen 99, 999, 9999, 99 999 u. s. w. kennen. Man stöfst dabei auf die Zahlen 7, 11, 13, 37, 41, 101, 271 u. s. w. Vgl. Aufgabe 11, S. 32.

§ 11. Gleichungen mit einer Unbekannten.

Man löse die Gleichungen:

1. $\frac{x+1}{4} + \frac{2x+3}{3} + \frac{4x-2}{5} = 6.$

Lösung. $x = 3.$

Probe. $\frac{3+1}{4} + \frac{6+3}{3} + \frac{12-2}{5} = 1 + 3 + 2 = 6.$

Die Richtigkeit der Lösung ist bei jeder der folgenden Aufgaben durch Anstellung der Probe zu erhärten. Die Anstellung der Probe bildet einen wesentlichen Teil der Auflösung.

2. $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+3}{11} = 2.$ ***Lösung.*** $x = 4.$

3. $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{7} = 1.$ „ $x = 5.$

4. $\frac{5x-2}{7} - \frac{7x+3}{15} = 1.$ „ $x = 6.$

Digitized by Google

5. $\frac{4x+1}{3} + \frac{6x+1}{4} = 2.$ ***Lösung.*** $x = \frac{1}{2}.$

6. $\frac{6x+2}{12} + \frac{3x+1}{3} = 1.$ „ $x = \frac{1}{3}.$

7. $\frac{7(x-1)+5}{12} + \frac{7(x+1)-3}{18} = 2.$ „ $x = 2.$

8. $\frac{x+4}{6} + \frac{9(x-3)+3}{8} = 8.$ „ $x = 8.$

9. $\frac{x+3}{5} + \frac{13x-1}{45} = 4.$ „ $x = 7.$

10. $\frac{4(x-1)}{15} + \frac{7(x+1)}{2} - \frac{3\cdot(x-6)}{5} = \frac{2(7x+8)}{3}.$

11. ***Musterbeispiel*** (mit Erklärungen).

$$\frac{5x-8}{7} + \frac{9x-3}{35} = \frac{x+3}{5}.$$

Ich multipliziere beide Seiten der Gleichung mit 7 und wende die Bruchgesetze an:

$$b \cdot \frac{a}{b} = a;\ \frac{\frac{a}{b}}{c} \cdot c = \frac{a}{b};\ b \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{c}.$$

$$5x - 8 + \frac{9x-3}{5} = \frac{7x+21}{5}.$$

Ich multipliziere die Gleichung mit 5 und erhalte durch Anwendung des Bruchgesetzes $b \cdot \frac{a}{b} = a$:

$$25x - 40 + 9x - 3 = 7x + 21.$$

Ich vereinige alles, was sich vereinigen läfst. Auch wende ich das Gesetz: $a - b - c = a - (b + c)$ an.

$$34x - 43 = 7x + 21.$$

Ich addiere beiderseits 43 und subtrahiere gleichzeitig $7x$.

$$27x = 64.$$

Endlich dividiere ich beide Seiten durch 27 und erhalte die ***Lösung:***

$$x = \frac{64}{27}.$$

Probe. Einfache Einsetzung des Wertes der Lösung ergibt:

$$\frac{5 \cdot \frac{64}{27} - 8}{7} + \frac{9 \cdot \frac{64}{27} - 3}{35} = \frac{\frac{64}{27} + 3}{5}.$$

Fortschaffung der Doppelbrüche nach dem Gesetz $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ ergibt:

$$\frac{320 - 216}{7 \cdot 27} + \frac{64 - 9}{35 \cdot 3} = \frac{64 + 81}{5 \cdot 27}.$$

Digitized by Google

Wiederholte Anwendung dieses nämlichen Gesetzes liefert:

$$\frac{104}{7 \cdot 27} + \frac{11}{3 \cdot 7} = \frac{29}{27}.$$

Erteilt man den beiden Brüchen links den gemeinsamen Nenner $7 \cdot 27$, so folgt: $\frac{203}{7 \cdot 27} = \frac{29}{27}$. Die Probe stimmt.

Anmerkung. Ausdrücke wie „ich schaffe, bringe auf diese, jene Seite", „ich transponiere", „ich schaffe die Nenner fort", „ich befreie x von dem Multiplikator 27" sind kaum bequemer als die sachbezeichnenden Ausdrücke der „Erklärung". Erstere sind daher als ergiebige Fehlerquellen für den Anfänger verboten.

Musterbeispiel (dasselbe, ohne Erklärungen).

$$\frac{5x - 8}{7} + \frac{9x - 3}{35} = \frac{x + 3}{5},$$

$$5x - 8 + \frac{9x - 3}{5} = \frac{7x + 21}{5},$$

$$25x - 40 + 9x - 3 = 7x + 21,$$

$$34x - 43 = 7x + 21,$$

$$27x = 64,$$

$$x = \frac{64}{27}. \quad \textbf{\textit{Probe}} \text{ wie vorhin.}$$

12. ***Musterbeispiel.*** $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \xi.$

Ich multipliziere beide Seiten der Gleichung mit $\gamma x + \delta$ und wende dabei das Bruchgesetz $b \cdot \frac{a}{b} = a$ an; dann wird

$$\alpha x + \beta = \xi\,(\gamma x + \delta).$$

Ich löse die Klammer (d. h. ich führe die angedeutete Multiplikation auf der rechten Seite aus); dann wird erhalten:

(c) $$\alpha x + \beta = \xi \gamma x + \xi \delta.$$

Nunmehr subtrahiere ich beiderseits die Gröfsen $\xi \gamma x$ und β; es folgt: $$\alpha x - \xi \gamma x = \xi \delta - \beta.$$

Hierfür kann gemäfs der Multiplikationsregel

$$a\,(b - c) = ab - ac$$

eintreten: $$x\,(\alpha - \xi \gamma) = \xi \delta - \beta.$$

Endlich dividiere ich beide Seiten der Gleichung durch $\alpha - \xi \gamma$ und finde die

Lösung. $$x = \frac{\xi \delta - \beta}{\alpha - \xi \gamma}.$$

Digitized by Google

Probe. Die einfache Ersetzung des Buchstabens x durch den gefundenen Wert gibt die Gleichung:

$$\frac{\alpha\,\dfrac{\xi\delta-\beta}{\alpha-\xi\gamma}+\beta}{\gamma\,\dfrac{\xi\delta-\beta}{\alpha-\xi\gamma}+\delta}=\xi.$$

Multiplizieren wir gemäfs der Bruchregel $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$ Zähler und Nenner des Hauptbruches mit der Zahl $\alpha-\xi\gamma$, so verwandelt sich die Gleichung in die folgende:

$$\frac{\alpha(\xi\delta-\beta)+\beta(\alpha-\xi\gamma)}{\gamma(\xi\delta-\beta)+\delta(\alpha-\xi\gamma)}=\xi,$$

welche nach Ausführung der angedeuteten Multiplikationen sich umwandelt in:

$$\frac{\alpha\delta\xi-\gamma\beta\xi}{\alpha\delta-\gamma\beta}=\xi;$$

denn im Zähler und Nenner zerstören je zwei Glieder sich gegenseitig.

Nunmehr ergibt sich nach Multiplikation mit der Zahl $\alpha\delta-\beta\gamma$ rechts und links derselbe Wert:

$$\alpha\delta\xi-\gamma\beta\xi=\xi(\alpha\delta-\gamma\beta).$$

Die Probe stimmt.

Besprechung. Aus Gleichung (c) S. 37 hätte man auch schliefsen können:

$$\beta-\xi\delta=x(\gamma\xi-\alpha)\text{ und}$$
$$x=\frac{\beta-\xi\delta}{\gamma\xi-\alpha}.$$

Beide Lösungen sind gleich richtig, wie wir im zweiten Lehrgange genauer sehen werden*. Eine eigentümliche Schwierigkeit ergibt sich, wenn $\alpha\delta-\beta\gamma=0$. Dieselbe kommt in den folgenden Beispielen nicht vor und bleibt vorläufig unerörtert. Vgl. unten § 13, Nr. 68.

Musterbeispiel nebst Probe (dasselbe, ohne Erklärungen).

Aufgabe.
$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\xi.$$

Lösung.
$$\alpha x+\beta=\xi(\gamma x+\delta),$$
$$\alpha x+\beta=\xi\gamma x+\xi\delta,$$
$$\alpha x-\xi\gamma x=\xi\delta-\beta,$$
$$x(\alpha-\xi\gamma)=\xi\delta-\beta.$$

Ergebnis.
$$x=\frac{\xi\delta-\beta}{\alpha-\xi\gamma}.$$

---

* § 12, Nr. 10.

Digitized by Google

Probe.

$$\frac{\alpha\dfrac{\xi\delta-\beta}{\alpha-\xi\gamma}+\beta}{\gamma\dfrac{\xi\delta-\beta}{\alpha-\xi\gamma}+\delta}=\xi.$$

$$\frac{\alpha(\xi\delta-\beta)+\beta(\alpha-\xi\gamma)}{\gamma(\xi\delta-\beta)+\delta(\alpha-\xi\gamma)}=\xi,$$

$$\frac{\alpha\delta\xi-\gamma\beta\xi}{\alpha\delta-\gamma\beta}=\xi,$$

$$\alpha\delta\xi-\gamma\beta\xi=\xi(\alpha\delta-\gamma\beta).$$

Die Probe stimmt.

13. $\frac{x+1}{x-1}=2.$ 14. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{3}{2}.$ 15. $\frac{x+1}{x-1}=a.$

16. $\frac{2x+3}{5x+1}=\frac{5}{6}.$ 17. $\frac{3x+4}{2x+7}=1.$ 18. $\frac{6x+1}{2x+5}=\frac{25}{13}.$

19. $\frac{2x+3}{6x+19}=\frac{a+3}{3a+19}.$ 20. $\frac{12x+1}{4x+7}=\frac{3a+1}{a+7}.$

21. $\frac{7x+4}{3x+8}=\frac{7a+1}{3a+2}.$ 22. $\frac{5x+36}{19x+48}=\frac{5b+3}{19b+4}.$

23. $\frac{12x-5}{19x-3}=\frac{4}{7}.$ 24. $\frac{3x-22}{5x-16}=\frac{1}{4}.$

25. $\frac{4x+17}{12x-19}=\frac{9}{10}.$ 26. $\frac{5x-13}{2x+17}=1.$

27. $\frac{2x-23}{23x+2}=\frac{1}{32}.$ 28. $\frac{8x+15}{12x-29}=5.$

29. * $\frac{17x-41}{19x+35}=\frac{5}{46}.$ 30. $\frac{23x-95}{24x+47}=\frac{66}{215}.$

31. $\frac{37x+124}{48x-213}=\frac{494}{267}.$ 32. $\frac{21x+306}{53x-207}=\frac{11}{6}.$

33. $\frac{12x-77}{5x+132}=\frac{5}{17}.$ 34. $\frac{19x-154}{21x-220}=5.$

35. $\frac{8x+91}{9x+104}=\frac{15}{17}.$ 36. $\frac{16x-156}{7x+221}=\frac{1}{6}.$

37. $\frac{5x+68}{12x-51}=1.$ 38. $\frac{14x+323}{25x-357}=\frac{33}{4}.$

39. $\frac{2x+57}{8x-114}=\frac{5}{2}.$ 40. $\frac{17x-285}{23x-361}=\frac{1}{2}.$

---

* Die Lösungen der Aufgaben 29 bis 46 sind ganze Zahlen.

Digitized by Google

41. $\frac{2x+3}{5x-4} = \frac{4x-11}{10x-39}$.

42. $\frac{3x-1}{7x+2} = \frac{6x-25}{14x-54}$.

43. $\frac{x+1}{3x-5} = \frac{2x-9}{6x-35}$.

44. $\frac{x-7}{5x-19} = \frac{3x-25}{15x-109}$.

45. $\frac{8x-1}{4x+6} = \frac{2x+71}{x+42}$.

46. $\frac{24x-5}{18x-11} = \frac{4x+15}{3x+4}$.

47. $\frac{x-4}{3x+2} = \frac{5x-28}{15x-47}$.

48. $\frac{2x+7}{3x-19} = \frac{6x-25}{9x-68}$.

49. $\frac{x-3}{4x-7} = \frac{2x-5}{8x}$.

50. $\frac{x+1}{3x-4} = \frac{3x+35}{9x}$.

51. $\frac{x+1}{3x-2} = \frac{2a+1}{a+3}$.

Lösung. $x = \frac{a+1}{a}$.

Erste Probe durch Einsetzung des Wertes für x. Vgl. S. 38.

Zweite Probe. Wir setzen $a = 1$. Dann wird $x = 2$, und dieser Wert mufs sich bei Lösung der Gleichung $\frac{x+1}{3x-2} = \frac{3}{4}$ ergeben. Diese Gleichung geht aus Aufgabe 51. durch die Annahme $a = 1$ hervor.

Man hätte auch für a irgend einen andern Zahlenwert mit gleichem Erfolge annehmen können.

52. $\frac{2x-1}{3x-1} = \frac{a+3}{2a+4}$.

Lösung. $x = \frac{a+1}{a-1}$.

Besondere Probe. $a = 2$, $x = 3$ als Lösung der Gleichung $\frac{2x-1}{3x-1} = \frac{5}{8}$.

53. $\frac{3x+5}{4x-1} = \frac{8a-9}{3a+11}$.

Lösung. $x = \frac{a+2}{a-3}$. ***Probe.*** $a = 4$.

54. $\frac{-x+4a}{3x+5a} = \frac{-x+2a}{3x}$; $x = \frac{10}{11}a$.

Probe. $a = 11$, $x = 10$; $a = \frac{11}{5}$, $x = 2$.

55. $\frac{x+1}{2-x} = \frac{2a+9}{a}$; $x = \frac{a+6}{a+3}$.

56. $\frac{x+a}{-4x+3} = \frac{-x+2a}{4x}$; $x = \frac{2a}{4a+1}$.

57. $3\frac{5x-a}{x-1} = \frac{15x+7a}{9x}$; $x = \frac{7a}{15(2a-1)}$.

Digitized by Google

58. $\frac{12}{x-1} + \frac{16}{x+1} = \frac{192}{x^2-1}$.

Anleitung. Es ist $x^2 - 1 = (x-1)\ (x+1)$; S. 23, Gl. (10).

59. $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-5} = \frac{13}{x^2-7x+10}$.

Anleitung. $(x-2)\ (x-5) = x^2 - 7x + 10$.

60. $\frac{5}{x+4} - \frac{7}{5x+9} = \frac{65}{5x^2+29x+36}$.

61. $\frac{5\ (2x+3)}{3x-2} - \frac{2\ (5x+1)}{3x+4} = \frac{163}{9x^2+6x-8}$.

Lösung. $x = 1$.

62. $\frac{7x+9}{x-5} - \frac{21x}{3x-4} = \frac{1004}{3x^2-19x+20}$.

63. $\frac{3x-4}{x-5} - \frac{21x}{7x+9} = \frac{900}{7x^2-26x-45}$.

64. $\frac{7x+9}{21x} - \frac{x-5}{3x-4} = \frac{796}{63x^2-84x}$.

65. $\frac{3x-4}{21x} - \frac{x-5}{7x+9} = \frac{692}{21\ (7x^2+9x)}$.

66. $\frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x+9}{x^2+5x+6} = \frac{100}{(x^2-4)\ (x^2-9)}$.

67. $\frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{x+9}{x^2+5x+6} = \frac{100+40n}{x^4-13x^2+36}$.

68. $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-b}{x+b} = \frac{2c}{x^2+(b-a)x-ab}$.

Lösung. $x = \frac{c}{a+b}$. ***Probe.*** $a = b = c = 1$.

69. $\frac{3x+b}{x-b} - \frac{6x-a}{2x+a} = \frac{4}{2x^2+(a-2b)x-ab}$.

Lösung. $x = \frac{1}{a+2b}$. ***Probe.*** $a = b = 1$.

70. $\frac{2x-b}{x-a} - \frac{4\ (x-a)}{2x+a} = \frac{3a\ (2a-b)}{2x^2-ax-a^2}$.

Lösung. $x = a$. ***Probe*** erst nach Ausführung der Multiplikation mit $(x-a)\ (2x+a)$ anzustellen.

Digitized by Google

71. In einem gleichschenkligen Dreieck soll jeder der gleichen Winkel halb so groſs sein als der Winkel an der Spitze. Man berechne die Winkel des Dreiecks.

72. In einem gleichschenkligen Dreieck ist jeder der gleichen Winkel doppelt so groſs als der Winkel an der Spitze. Man berechne die Winkel.

73. In einem Dreieck ist der mittlere Winkel das Doppelte und der gröſste das Dreifache des kleinsten. Man berechne die Winkel.

74. In einem Dreieck ist der mittlere Winkel das $m$fache, der gröſste das $(m + 1)$fache des kleinsten. Man berechne die Winkel.

75. Zwei Rechtecke haben gleichen Umfang, nämlich 100 m. Die Breite des länglichern Rechtecks ist um 5 m kleiner als die des andern, und sein Inhalt ist um 35 qm geringer. Man bestimme Länge und Breite beider Figuren.

76. Ein Kapital ist durch Zuschlag der jährlichen 4proz. Zinsen in 9 Jahren zu 340 ℳ angewachsen. Wie groſs war das ursprüngliche Kapital?

Lösung. Das Kapital möge x ℳ betragen;

100 ℳ bringen in 1 Jahr 4 ℳ Zinsen, also:

1 „ „ „ 1 „ $\frac{4}{100}$ „ „

x „ „ „ 1 „ $\frac{4x}{100}$ „ „

x „ „ „ 9 „ $\frac{36x}{100}$ „ „

Kapital und Zinsen haben also nach 9 Jahren den Wert

$$x + \frac{9x}{25},$$

laut Aufgabe 340 ℳ, daher die Gleichung:

$$x + \frac{9x}{25} = 340,$$

$$x = 250.$$

Probe. Das Kapital beträgt 250 ℳ, folglich die jährlichen 4proz. Zinsen 10 ℳ. Dies macht in 9 Jahren 90 ℳ, welche zu 250 ℳ hinzugefügt 340 ℳ ergeben*.

---

* Ebenso ist bei den folgenden Aufgaben zu verfahren, nicht durch Einsetzung in die Gleichung.

Digitized by Google

77. Ein Kapital von 750 ℳ ist durch Zuschlag der jährlichen Zinsen in 8 Jahren auf 930 ℳ angewachsen. Wie hoch war der Zinsfuſs?

78. Ein Kapital von 1025 ℳ ist durch Zuschlag der 4proz. jährlichen Zinsen zu einer Schuld von 1230 ℳ angewachsen. Wieviel Jahre sind keine Zinsen bezahlt worden?

79. Ein Kapital von c ℳ wächst durch Zuschlag der jährlichen Zinsen in n Jahren zu einem Schuldbetrage von s ℳ an, wenn der Zinsfuſs z % (z für 100) beträgt. Welche Gleichung besteht zwischen den Gröſsen c, n, s, z?

Antwort. $$s = c\left(1 + \frac{nz}{100}\right).$$

80. Jemand bezahlt 5 Monate vor dem Verfalltag eine Wechselschuld mit 4 % Diskonto. Wie hoch beläuft sich die Schuld, wenn die Barzahlung 23 600 ℳ beträgt?

Anleitung. Wenn jemand 100 ℳ schuldig ist und ein Jahr vor dem Verfalltage bezahlt, so ist man im kaufmännischen Leben, besonders im Wechselverkehr, mit einem Abzuge (ital. disconto, sconto) zufrieden. So verlangt man bei 4proz. jährlichem Diskonto statt einer Schuld von 100 ℳ eine Barzahlung von 96 ℳ. Das Jahr wird dabei zu 12 Monaten, der Monat zu 30 Tagen gerechnet. Kauft jemand einen Wechsel, so darf er den Diskonto für die Zeit zwischen Kauftag und Verfalltag abziehen. Dem Wesen nach gleiche Bedeutung mit Diskonto hat das Wort Rabatt; nur wird dasselbe nicht im Wechselverkehr, sondern (gewöhnlich) für den Zahlungsnachlaſs gebraucht, den der Groſshändler dem Wiederverkäufer gewährt.

81. Ein Krämer zahlt dem Groſskaufmann 264 ℳ bar. Wieviel betrug der (nominelle) Wert der Waren, wenn 7 % Rabatt bewilligt worden sind? *

82. Jemand kauft Waren und verkauft dieselben mit einem Gewinn von 6 %. Er löst 318 ℳ. Wie hoch belief sich der Einkaufspreis?

83. Ein Krämer kauft für 300 ℳ Zucker und für 500 ℳ Kaffee. Da der Kaffee im Preise steigt, so verkauft er denselben mit doppelt so hohem Gewinn auf das Hundert wie den Zucker. Im ganzen löst er 878 ℳ. Wieviel Prozent gewann er beim Verkaufe der beiden Warensorten?

* Pfennigbrüche werden vernachlässigt.

Digitized by Google

84. Ein Kaufmann kauft drei Sorten Tuch: von der ersten für 300 ℳ, von der zweiten für 400 ℳ, von der dritten für 500 ℳ; er verkauft die drei Sorten zu einem solchen Preise, dafs er an der zweiten 2, an der dritten 4 % mehr verdient als an der ersten. Er löst im ganzen 1312 ℳ. Wieviel gewann er bei jeder Sorte?

85. Jemand kauft zwei Pferde, das eine zu einem um 85 ℳ höheren Preise als das andere. Da er an dem besseren Pferde nur 5 %, an dem geringeren 9 % beim Wiederverkaufe verdient, so beträgt der Unterschied im Verkaufspreise 80 ℳ. Wie teuer hat er beide Pferde gekauft und verkauft?

86. Ein anderes Mal kaufte der Händler wieder zwei Pferde und zahlte für das bessere 100 ℳ mehr als für das schlechtere. Beim Verkaufe verdiente er an dem besseren nur 3 %, während er an dem schlechteren 11 % verlor. Hierdurch stellt sich der Unterschied im Verkaufspreise auf 173 ℳ. Zu welchen Preisen hat er gekauft und verkauft?

87. Jemand verleiht zwei Kapitalien, von denen das eine 200 ℳ gröfser ist als das andere, und zwar das gröfsere zu 5, das kleinere zu 4 %. Nach drei Jahren erhält er beide Kapitalien nebst Zinsen zurückbezahlt, im ganzen 1138 ℳ. Wie hoch beliefen sich die beiden Kapitalien?

88. Ein Bankier kauft (diskontiert) zwei Wechsel, den einen von 3600 ℳ, den andern von 4800 ℳ, und berechnet $2\frac{1}{2}$ % jährlichen Skonto. Die Frist vom Kauftage zum Verfalltage beträgt beim letzteren einen Monat mehr als beim ersteren, und er zahlt 8285 ℳ bar. Wieviel Monate betrug die Frist jedes Wechsels?

89. Jemand hat zwei Sorten Gewürzwaren, von denen die eine das Kilogramm mit 2 ℳ, die andere mit 3 ℳ bezahlt werden mufs. Er will aus denselben durch Vermischung eine Mittelsorte herstellen, welche er das Kilogramm zu 2,35 ℳ abgeben kann. Wieviel mufs er zu 100 *kg* Mischsorte von den beiden ursprünglichen nehmen?

90. Zwei Sorten Tabak sollen miteinander vermischt werden, so dafs 100 *g* zu 47 ₰ abgegeben werden können. Die bessere Sorte kostet 50 ₰, die schlechtere 45 ₰ die 100 *g*. Wieviel mufs von jeder Sorte zur Herstellung von 20 *kg* Mischsorte genommen werden?

91. Wenn man von den Aschenbestandteilen absieht, so kann man annehmen, dafs die Steinkohle doppelt soviel Sauerstoff und 17mal soviel Kohlenstoff enthält als Wasserstoff und nur aus

Digitized by Google

diesen drei Elementen besteht. Wieviel Sauerstoff befindet sich nach diesen Annahmen in 100 *kg* Steinkohle?

92. Die Krone des Königs Hiero bestand aus Gold und Silber und wog 20 Pfund. Gold ist 19,5mal so schwer als ein gleiches Volumen (ein gleicher Raumteil) Wasser, so dafs ein Kubikdezimeter (ein Liter) Gold 19,5 *kg* wiegt. Ebenso ist Silber 10,5mal so schwer als Wasser. Jene Königskrone nun war nach der Wägung des Archimedes 16mal so schwer als ein gleiches Volumen Wasser. Wieviel Pfund Gold enthielt sie? War die Angabe des Verfertigers, dafs er 16 Pfund Gold verwendet habe, richtig?

93. Das Wasser kann durch den galvanischen Strom in Sauerstoff und Wasserstoff zerlegt werden, und zwar liefern 18 *g* Wasser 2 *g* Wasserstoff und 16 *g* Sauerstoff. Wieviel Sauerstoff enthält demnach 1 *l* Wasser? Auch ohne Gleichung zu lösen.

94. Zu einem gemeinsamen Geschäfte gab *A* auf eine Anzahl Monate 7285 ℳ, *B* auf 8 Monate länger als *A* 1457 ℳ her. Beim Abschlufs erhielten beide gleichen Anteil am Gewinn. Wieviel Monate hat *A* teilgenommen?

95. In einem Zimmer befinden sich nebeneinander zwei Thermometer, von denen das eine die Einteilung nach Celsius, das andere die nach Réaumur besitzt. Addiert man die Zahlen, welche die Temperaturgrade angeben, so erhält man 26. Wie hoch ist die Temperatur nach Celsius?

96. Addiert man die Temperaturgrade, welche drei in demselben Raume angebrachte Thermometer (nach Celsius, Réaumur, Fahrenheit) zeigen, so erhält man 86. Wie hoch ist die Temperatur nach Celsius?

97. Ein Vater ist 38, sein Sohn 4 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater 3mal so alt sein als der Sohn?

98. Von zwei Brüdern ist der eine 36, der andere 30 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der ältere genau doppelt so alt als der jüngere?

99. Ich kenne eine zweizifferige Zahl von folgender Beschaffenheit: Multipliziere ich die links stehende Ziffer mit 2 und subtrahiere vom Produkte 3, so erhalte ich die rechts stehende Stelle ich die Ziffern um, so erhalte ich eine Zahl, welche um 9 gröfser ist als die ursprüngliche. Wie heifst die Zahl?

100. Eine zweistellige Zahl hat die Beschaffenheit, dafs die links stehende Ziffer das Dreifache der andern ist. Durch Umstellung der Ziffern wird die Zahl um 36 kleiner. Wie heifst die Zahl?

Digitized by Google

101. Die Zehner einer dreistelligen Zahl werden durch eine um 3, die Hunderter durch eine um 4 gröfsere Ziffer bezeichnet als die Einer. Kehrt man die Ordnung der Ziffern um und addiert die neu entstandene Zahl zur ursprünglichen, so erhält man 908. Wie heifst die Zahl?

102. Die Hunderter einer dreistelligen Zahl sind um 1 geringer als die Einer; die Zehner sind das Dreifache der Einer. Kehrt man die Ordnung der Ziffern um und addiert die entstehende Zahl zur ursprünglichen, so erhält man 685. Wie heifst die Zahl?

103. Ich multipliziere eine gewisse Zahl mit 8, addiere zum Produkte 9, dividiere das Ergebnis durch 13, addiere zum Quotienten 2, so erhalte ich die urspüngliche Zahl. Welche?

104. Ich addiere zu einer gewissen Zahl 3, multipliziere die Summe mit 2, addiere zum Produkte 1, dividiere das Ergebnis durch 3, so erhalte ich die ursprüngliche Zahl. Welche?

105. Der Zähler eines gewissen Bruches ist um 5 gröfser als der Nenner. Vergröfsere ich Zähler und Nenner gleichzeitig um 6 Einheiten, so erhalte ich $\frac{3}{2}$. Wie heifst der Bruch?

106. Multipliziert man den Zähler eines Bruches mit 2 und fügt noch 1 hinzu, so hat man den Nenner. Vergröfsert man Zähler und Nenner gleichzeitig um 10 Einheiten, so erhält man $\frac{3}{5}$. Wie heifst der Bruch?

107. Man denke sich eine willkürliche Zahl, addiere 11 hinzu, multipliziere das gefundene Ergebnis mit 2, subtrahiere vom Produkte 20, multipliziere den Rest mit 5 und subtrahiere vom Produkte das Zehnfache der erstgedachten Zahl, dann erhält man immer 10. Wie ist das zu erklären?

108. Man denke sich eine willkürliche Zahl, multipliziere dieselbe mit 3, addiere dazu 1, multipliziere das Ergebnis mit 2, addiere 4, dividiere jetzt durch 6, subtrahiere die ursprünglich gedachte Zahl, so erhält man immer 1. Wie ist das zu erklären?

109. „Wie lange haben deine Herbstferien gedauert?“ fragte jemand einen Tertianer. „Für mich“, erwiderte derselbe, „etwas länger als für die anderen Schüler, weil ich gegen Ende der Ferien erkrankte. Die Krankheit dauerte sieben Tage. Gesund bei den Eltern zu Hause war ich während $\frac{2}{3}$ des ganzen Zeitraums, $\frac{1}{9}$ der Zeit dauerte ein Ausflug, den ich mit meinem Vater, $\frac{1}{15}$

Digitized by Google

ein Ausflug, den ich mit meinem Bruder unternahm.“ Wie lang war der ganze Zeitraum?

110. Ein Beobachter hat während einer Anzahl Tage sich über den Verlauf des Wetters Aufzeichnungen gemacht. $\frac{1}{3}$ der Tage findet er als „regnerisch“, $\frac{1}{15}$ als „gewitterschwül“, $\frac{1}{4}$ als „halbbedeckt“, $\frac{3}{10}$ als „vorwiegend heiter“ angemerkt. Aufserdem findet er für 3 Tage „Schnee“ verzeichnet. Wieviel Tage hat er beobachtet?

111. „Wieviel Geschwister seid ihr?“ fragte ein Knabe seinen Freund. Dieser antwortete: „Ich habe gerade soviel Brüder wie Schwestern, aber jede meiner Schwestern hat doppelt soviel Brüder als Schwestern.“ „Sonderbar!“ sagte jener, „ich habe einen Bruder mehr als ich Schwestern habe, aber jede meiner Schwestern hat auch doppelt soviel Brüder als Schwestern.“ Wie ist das zu erklären?

112. Ein Spieler verdoppelt beim ersten Spiele durch Gewinn seine mitgebrachte Barschaft, verliert beim zweiten Spiele eine Mark und setzt, um dieselbe wiederzugewinnen, alles aufs Spiel. Er gewinnt und setzt beim folgenden Spiele seinen bisherigen Gewinn ein. Auch jetzt hat er Glück, so dafs also der bisherige Gewinn verdoppelt wird. Im Übermute setzt er nun seine ganze Barschaft aufs Spiel. Er verliert und jammert: „Hätte ich doch rechtzeitig aufgehört! Vor dem letzten Spiele fehlte mir nur gerade meine ursprüngliche Barschaft an 20 ℳ.“ Wieviel betrug dieselbe?

113. Ein Spaziergänger macht ein Kilometer in 13 Minuten. 20 Minuten nach Ausgang desselben begibt sich ein Eilbote auf den Weg, der, um jenen einzuholen, ein Kilometer in 9 Minuten zurücklegt. Wann und wo trifft er den Spaziergänger?

Antwort. 45 Minuten nach Abgang des Eilboten und 5 *km* vom Ausgangspunkte.

Probe. Der Spaziergänger geht im ganzen $20 + 45 = 65$ Minuten und macht darin $5\ km = \frac{65}{13}$ ab; der Eilbote geht 45 Minuten und macht in dieser Zeit dieselbe Strecke ab, weil er in 9 Minuten ein Kilometer zurücklegt.

114. Ein Landwirt verläfst seinen Hof um 6 Uhr früh, um sich zur Stadt zu begeben. Er befiehlt seinem Knecht, ihm mit

Digitized by Google

dem Wagen zu folgen; dieser werde ihn bald einholen, da er zu der 10 *km* betragenden Entfernung 2 Stunden gebrauche. Eine Viertelstunde nach Abgang seines Herrn folgt der Knecht mit dem Wagen und durchfährt ein Kilometer in $4\frac{1}{2}$ Minuten. Wann und wo holt er seinen Herrn ein?

Antwort. Um 6 Uhr 24 Minuten, 2 *km* vom Hofe entfernt, holt er den Landwirt ein.

115. Zwei Knaben *A* und *B* machen einen Wettlauf, bei welchem *A* dem *B* 100 *m* vorgibt. *A* durchläuft in einer Sekunde 3,20 *m*, *B* nur 1,60 *m*. Wann und wo holt *A* den *B* ein?

116. Bei der vorigen Aufgabe hat *A* die doppelte Geschwindigkeit* des *B*. Wenn *A* die vorgegebenen 100 *m* zurückgelegt hat, ist *B* 50 *m* voraus; hat *A* diese 50 *m* durchlaufen, so ist *B* 25 *m* voraus u. s. w. Wird daher *A* den *B* vielleicht niemals einholen?

117. Zwei Freunde, welche 9,8 *km* voneinander entfernt wohnen, verabreden sich, gleichzeitig aufzubrechen und einander entgegen zu gehen. Wo und wann findet die Begegnung statt wenn der eine das Kilometer in 10, der andere in 11 Minuten zurücklegt?

118. Zwei Freunde gehen von zwei Ortschaften *A* und *B* gleichzeitig aufbrechend einander entgegen. Der erstere würde den ganzen Weg in 1 Stunde und 36 Minuten, der andere in 1 Stunde und 24 Minuten zurücklegen. Nach welcher Zeit findet die Begegnung statt?

Anleitung. Der Weg von *A* nach *B* betrage *a km*. Die Gröfse *a* bleibt unbestimmt.

119. Ein Hund verfolgt einen Hasen, welcher 150′ voraus ist und 7′ weite Sprünge macht, während der Hund 9′ weit springt. Nach wieviel Sprüngen wird der Hund den Hasen einholen? (Über diese alte Rätselaufgabe vgl. *Cantor,* Gesch. der Mathematik I, 718.)

120. *A* macht 11 Schritte, während *B* 13 Schritte macht; aber 5 Schritte des *A* sind so grofs wie 7 Schritte des *B*. Die beiden gehen hintereinander auf gerader Strafse, und *B* ist 600 seiner Schritte voraus. Wieviel Schritte macht er noch, bis *A* ihn einholt?

---

* Geschwindigkeit heifst die Anzahl Meter, welche ein gleichförmig bewegter Körper in jeder Sekunde zurücklegt.

Digitized by Google

Anleitung. Ein Schritt des B betrage a *dm*, dann ist ein Schritt des A gleich $\frac{7}{5} a$ *dm*. Wenn B x Schritte macht, so macht A $\frac{11x}{13}$ Schritte.

Lösung. B macht noch 3250 Schritte.

Probe. Da B noch $3250 = 13 \cdot 250$ Schritte macht, so folgt aus den Bestimmungen der Aufgabe, dafs A während derselben Zeit $11 \cdot 250 = 2750$ Schritte machen wird. $2750 = 5 \cdot 550$ Schritte des A sind aber so grofs wie $7 \cdot 550 = 3850$ Schritte des B. Daher ist die Lösung richtig, denn B ist 600 Schritte voraus und wird noch 3250 machen: $3250 + 600 = 3850$.

121. Ein Fufsgänger und ein Reiter verlassen gleichzeitig die Stadt A, und zwar auf dem zu der 31 *km* entfernt liegenden Stadt B führenden Steindamm. Der Fufsgänger macht in einer Stunde 5, der Reiter 12 *km*. Wo und wann werden sich die beiden wieder treffen, wenn der Reiter nach halbstündigem Aufenthalt in B auf demselben Wege nach A zurückkehrt?

Antwort. 20 *km* von A nach 4 Stunden.

122. Eine Schafherde verläfst die Stadt A auf dem zu dem 12 *km* entfernt liegenden Gute des Besitzers führenden Wege. Drei Viertelstunden später fährt der Gutsbesitzer in seinem Jagdwagen von A nach seinem Gute. Dort angekommen, befiehlt er dem Kutscher, augenblicklich zurückzufahren und dem Schäfer eine vergessene Bestellung auszurichten. Der Jagdwagen legt die Strecke von A bis zum Gute in 1 Stunde 30 Minuten zurück, während die Herde dazu 6 Stunden gebraucht. Wann und wo fand die erste Begegnung des Jagdwagens mit der Herde statt? wann und wo wird die zweite stattfinden?

123. Um 6 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr eine gerade Linie. Wann wird dies nach 7 Uhr zuerst wieder der Fall sein?

124. Wann werden nach 12 Uhr die Zeiger denselben spitzen Winkel zuerst wieder bilden, den sie um 10 Uhr gebildet haben?

125. Ein Meister und zwei Gesellen unternehmen den Bau einer Mauer. Der Meister würde die Arbeit allein in 140 Stunden, der erste Geselle in 280, der zweite erst in 315 Stunden ausführen können. In welcher Zeit wird die Arbeit vollendet sein, wenn alle drei gleichzeitig tätig sind? — In 72 Stunden.

126. Drei Schleusen können einen Teich entleeren. Durch die erste würde das Wasser in 26 Stunden, durch die zweite in

Digitized by Google

65, durch die dritte in 78 Stunden abfliefsen. Wie lange dauert die Entleerung des Teiches, wenn die drei Schleusen gleichzeitig geöffnet sind? — 15 Stunden.

127. Aus einem Steinbruche wird das Wasser durch zwei Pumpen entleert, die von zwei Arbeitern A und B bedient werden. Die erstere, welche von A gehandhabt wird, liefert in 7 Schlägen ebensoviel Wasser wie die zweite in 8 Schlägen; aber A vermag nur 9 Schläge zu geben, wenn B 10 gibt. Nachdem B 50 Schläge getan hat, beginnt A seine Arbeit. Wann wird er genau dieselbe Wassermenge gefördert haben wie B?

Antwort. Nach 1800 Schlägen. Vgl. Aufgabe 120.

---

128. In einem Viereck übertrifft der gröfste Winkel den zweitgröfsten um 20^0, dieser den kleinsten um $\frac{3}{5}$ des gröfsten, während der Unterschied der beiden kleinsten Winkel 28^0 beträgt. Man bestimme die vier Winkel.

Antwort. 140^0, 120^0, 64^0, 36^0.

129. Man bestimme die vier Winkel eines Vierecks nach folgenden Angaben. Der zweite ist doppelt so grofs als der erste weniger 7^0, der dritte dreimal so grofs als der erste weniger 15^0, der vierte viermal so grofs als der erste weniger 38^0.

Lösung. 42^0, 77^0, 111^0, 130^0.

130. In einem Kreisviereck sollen zwei gegenüberliegende Winkel derartig bestimmt werden, dafs der spitze der 5te (12te) Teil des stumpfen wird.

131. Jemand versucht eine Anzahl Markstücke in Form eines Quadrates auf dem Tische anzuordnen. Beim ersten Versuche bleiben ihm 25 Stück übrig. Darum legt er in jede Reihe ein Stück mehr. Aber nun fehlen ihm zur Ausführung seines Vorhabens 14 Markstücke. Wieviel Stück waren es? — 386.

132. Jemand versucht eine Anzahl Markstücke in Form eines Rechtecks so anzuordnen, dafs jede wagerechte Reihe ein Stück mehr enthält als jede senkrechte. Der Versuch gelingt nicht, da 18 Stücke übrig bleiben. Jetzt legt er in jede Reihe ein Stück mehr, findet aber, dafs ihm 30 Stück fehlen. Wieviel waren es? — 570.

133. Ein Gärtner pflanzt junge Bäume in Form eines Rechtecks, und zwar so, dafs jede von Ost nach West liegende Reihe

Digitized by Google

fünfmal soviel Bäume enthält, als in einer nordsüdlich gerichteten Reihe stehen. Da 61 Bäume übrig bleiben, pflanzt er in jede Reihe des Rechtecks einen Baum mehr und findet so für sämtliche Bäume Platz. Wieviele waren zu pflanzen? — 561.

134. Jemand will eine Anzahl von Markstücken in Form von zwei Quadraten auf dem Tische anordnen. Zuerst nimmt er die Seiten der Quadrate gleich grofs, dabei fehlen ihm aber 3 Markstücke. Jetzt nimmt er für das eine Quadrat in jeder Reihe 2 Stück weniger, für das andere 1 Stück mehr als vorhin und gelangt zum Ziel. Wieviel Stücke waren es? — 29.

135. Vor einem Gebäude, 1,60 *m* von demselben entfernt, steht ein senkrecht aufgerichteter Stab, dessen obere Spitze sich in gleicher Höhe mit der Fensterbank befindet. Als der Stab an das Haus angelehnt wurde (ohne Veränderung seines Fufspunktes), befand sich die obere Spitze desselben 40 *cm* unterhalb der Fensterbank. Wie hoch war letztere über dem Erdboden? 3,40 *m*. (Pyth. Lehrs.)

136. Ich kenne vier Zahlen von folgender Beschaffenheit: Die zweite übertrifft das Doppelte der kleinsten um 6, die dritte ist um 1 gröfser als die zweite, und die gröfste ist um 2 gröfser als die erste und dritte zusammen. Endlich ist das Quadrat der vierten gleich der Summe der Quadrate der drei andern. Wie heifsen die Zahlen?

Antwort. 2, 10, 11, 15.

137. Ich kenne eine Zahl von folgender Beschaffenheit: Zuerst multipliziere ich dieselbe mit 3 und subtrahiere 1; dann multipliziere ich sie mit 4 und addiere 4; endlich multipliziere ich sie mit 5 und addiere 3. Dann habe ich drei Zahlen von der Art erhalten, dafs das Quadrat der dritten der Summe der Quadrate der anderen gleicht. Wie heifst die Zahl? — 2.

138. Jemand hat an zwei säumige Schuldner je ein Kapital zu $3^1/_2\,\%$ verliehen, im ganzen 7800 ℳ; der eine Schuldner hat seit 4 Jahren, der andere seit 5 Jahren keine Zinsen mehr bezahlt. Im ganzen würde der Gläubiger jetzt 9053 ℳ an Kapital und Zinsen zu fordern haben. Wie grofs sind die verliehenen Kapitalien?

Antwort. 3200 und 4600 ℳ

139. Jemand hat seit 5 Jahren für zwei verliehene Kapitalien keine Zinszahlung erhalten. Das eine Kapital ist doppelt so grofs

Digitized by Google

als das andere, das kleinere ist zu 4 %, das gröfsere zu 5 % verliehen. Gegenwärtig beläuft sich die Gesamtforderung auf 23 680 ℳ. Wieviel beträgt das kleinere Kapital?

Antwort. 6400 ℳ.

140. Jemand kauft für 120 000 ℳ zusammen zwei Häuser und verkauft nach einiger Zeit das eine mit 3 % Schaden, das andere mit 9 % Nutzen. Im ganzen gewinnt er bei dem Handel 7821 ℳ. Wie hoch hat er gekauft?

Antwort. Das Haus, an dem er beim Verkaufe gewann, hat er mit 95 175 ℳ bezahlt.

141. Ein Krämer kauft für 402 ℳ Kaffee und Thee, verkauft ersteren mit einem Nutzen von 12 %, letzteren mit einem Nutzen von 15 % und löst im ganzen 457 ℳ 80 ₰. Für welchen Betrag hat er Kaffee gekauft?

Antwort. Für 150 ℳ.

142. Ein Kleinhändler bezieht von einem Grofskaufmann zwei Sorten Ware, im ganzen für 2800 ℳ. Da er für die eine Sorte 5 Monate, für die andere 6 Monate vor dem Verfalltage Zahlung leistet, so gewährt ihm der Grofskaufmann für erstere einen jährlichen Rabatt von 6 %, für letztere von 3 %. Die geleistete Barzahlung betrug 2746 ℳ. Wie hoch waren die ursprünglichen (nicht rabattierten) Preise?

Antwort. 1200 und 1600 ℳ.

143. Jemand diskontiert (kauft) zwei Wechsel, welche zusammen auf 13 200 ℳ lauten, den einen mit $3\frac{1}{2}$ % jährlichem Diskonto 9 Monate, den andern mit 3 % jährlichem Diskonto 10 Monate vor dem Verfalltage. Der gewährte Nachlafs beträgt für letzteren 22 ℳ 50 ₰ mehr als für ersteren. Auf welche Summen lauteten die Wechsel? — Auf 6000 und 7200 ℳ.

144. Jemand verkauft zwei Pferde zusammen für 1120 ℳ. An dem einen hat er 15, an dem andern 20 % verdient. Wie hoch belief sich der Einkaufspreis?

Antwort. Das eine kostete 640, das andere 320 ℳ.

145. Jemand vermacht letztwillig einem seiner Anverwandten 5670 ℳ, einem Bruder desselben 14 175 ℳ, und zwar so, dafs auf jedes Kind der beiden Brüder ein gleicher Anteil entfällt. Der eine Bruder hat 3 Kinder mehr als der andere. Wie hoch belief sich der Anteil jedes der Kinder?

Digitized by Google

Antwort. 2835 ℳ; der eine Bruder hatte 2, der andere 5 Kinder.

146. Zu einem gemeinsamen Geschäfte gab *A* 400 ℳ mehr her als *B*. Bei der Teilung erhielt *A* 4410 ℳ, *B* 3990 ℳ Wieviel hat *A* zu dem Geschäfte hergegeben?

Antwort. 4200 ℳ

147. Ein anderes Mal hatten *A* und *B* zu einem gemeinsamen Geschäfte gleich viel hergegeben, aber *A* auf 2 Monate länger als *B*. Bei der Teilung erhielt *A* 8400, *B* 6000 ℳ Für wieviel Monate gab *A* sein Geld her?

148. Jemand zahlt für zwei Wechsel bei gleichem Diskonto und gleicher Zahlungsfrist für den einen 899 ℳ, für den andern, der auf einen um 90 ℳ höheren Betrag lautet, 986 ℳ Auf welche Beträge lauten die Wechsel?

Antwort. Auf 930 und 1020 ℳ

Wie kann man diese Aufgabe ohne Ansatz einer Gleichung lösen?

149. Jemand hat zwei Sorten Silber, das eine vom Feingehalt* 635, das andere vom Feingehalt 814. Wieviel mufs er von jeder Sorte nehmen, um 537 *g* Silber vom Feingehalte 700 zu erhalten?

Antwort. 342 und 195 *g*.

Anleitung. Man suche das in 537 *g* enthaltene reine Silber auf doppelte Art auszudrücken.

150. Wieviel Silber vom Feingehalt 765 und 921 mufs man zusammenschmelzen, um 624 *g* vom Feingehalt 880 zu erhalten?

Antwort. 164 und 460 *g*.

151. Wieviel reines Silber mufs zu solchem vom Feingehalt 834 hinzukommen, wenn man 996 *g* vom Feingehalte 931 erhalten will?

Antwort. 582 *g*.

152. Jemand hat 67proz. Alkohol und will durch Zusatz von 79proz. 5 *kg* 70proz. erhalten. Wieviel mufs er von jeder Sorte nehmen?

Antwort. 3,75 und 1,25 *kg*.

153. Jemand giefst 3 *l* Wasser von 25° und 2 *l* von 54° zusammen. Wie hoch wird die Temperatur der Mischung?

---

* Silber vom Feingehalt 635 enthält auf 1000 *g* 635 *g* reines Silber.

Digitized by Google

Anleitung. Diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 *kg* Wasser von 0° C. auf 1° C. zu erwärmen, nennt man eine Wärmeeinheit, Kalorie. Wasser von t^0 Wärme und a *kg* Gewicht erforderte also, um von 0° auf t^0 zu kommen, at Kalorien, oder wie man zu sagen sich erlauben darf, es „enthält" at Kalorien. Vor dem Versuch enthielt also das verwendete Wasser $3 \cdot 25 + 2 \cdot 54$ Kalorien, nach dem Versuch x $(3 + 2)$ Kalorien. Da nun angenommen wird, dafs beim Versuch weder Wärme gewonnen wird noch verloren geht, so entsteht die Gleichung $5x = 183$.

154. Wieviel Wasser von 54° und wieviel von 78° mufs man nehmen, um 96 *kg* Wasser von 65° zu erhalten?

Antwort. 52 und 44 *kg*.

155. Wieviel siedendes Wasser (100°) mufs man zu 48 *l* Wasser von 17° gieſsen, um Wasser von t^0 zu erhalten?

$$x = \frac{48\,(t - 17)}{100 - t}.$$

156.

Ein	*cdm*	Eisen	wiegt	7,6 *kg*;
„	„	Blei	„	11,4 „
„	„	Gold	„	19,3 „
„	„	Kupfer	„	8,8 „
„	„	Nickel	„	8,5 „
„	„	Platin	„	21,4 „
„	„	Quecksilber	„	13,6 „
„	„	Silber	„	10,5 „
„	„	Zink	„	7,2 „
„	„	Zinn	„	7,3 „
„	„	reinen Wassers . .	„	1,0 „

Zwei gleich groſse Stücke, das eine aus Eisen, das andere aus Blei bestehend, wiegen zusammen a *kg*. Wieviel wiegt das Stück Eisen?

Anleitung. Wiegt das Stück Eisen x *kg*, so würde das von ihm bei völligem Eintauchen verdrängte Wasser $\frac{x}{7,6}$ *kg* wiegen. Man findet die Gleichung $\frac{x}{7,6} = \frac{a - x}{11,4}$.

157. Man löse die vorige Aufgabe für zwei beliebige andere der in obiger Tafel aufgeführten Metalle.

158. Ein Würfel besteht aus einer Mischung von Kupfer und Gold. Er wiegt genau so viel wie ein gleich groſser Würfel

Digitized by Google

von Blei, nämlich 700 *g*. Wieviel Gold und wieviel Kupfer enthält er?

Antwort. 293,45 und 406,55 *g*.

159. Ein Klumpen Metall, welcher aus Silber und Kupfer besteht, wiegt neunmal so viel als das beim völligen Eintauchen von ihm verdrängte Wasser. Wieviel Silber und wieviel Kupfer enthält er?

Antwort. Er enthält annähernd 7 Gewichtsteile Silber und 38 Gewichtsteile Kupfer.

160. Jemand hat eine Flasche zuerst mit Wasser und alsdann mit Quecksilber gefüllt. Die Flasche wog bei der letzteren Füllung zwölfmal so viel, als wenn sie mit Wasser gefüllt war. Wie grofs ist ihr Gewicht, wenn sie 5,5 *l* Wasser fafst?

Antwort. 800 *g*.

161. Eine Flasche, welche *a l* Wasser fafst, wiegt mit Quecksilber gefüllt *b*mal so viel, als wenn sie mit Wasser gefüllt ist. Wie schwer ist die Flasche?

Antwort. $x = \frac{(13{,}6 - b)\, a}{b - 1}$ Kilogramm.

162. Ein Kilogramm Kupfer bedarf einer Zufuhr von $\frac{1}{11}$ Kalorie, um in der Temperatur um einen Grad gesteigert zu werden. Jemand wirft nun in ein Gefäfs, welches 3 *l* Wasser von der Temperatur 15° enthält, ein Stück erhitzten Kupfers, welches 935 *g* wiegt, und beobachtet nach Ausgleich des Temperaturunterschiedes 17°. Wie hoch ist die Temperatur des erhitzten Kupfers anzunehmen?

Anleitung. Auf x Grad. Dann waren über den Zustand bei null Grad vorhanden:

vor dem Versuche $\frac{x}{11} \cdot 0{,}935$ Kalorien im Kupfer,
„ „ „ $3 \cdot 15$ „ „ Wasser;
nach „ „ $\frac{17}{11} \cdot 0{,}935$ „ „ Kupfer,
„ „ „ $3 \cdot 17$ „ „ Wasser.

Indem nun angenommen wird, dafs während des Versuches weder Wärme gewonnen noch verloren wird, kann man ansetzen:

$$17\ (0{,}085 + 3) = x \cdot 0{,}085 + 15 \cdot 3,$$

woraus $x = 87{,}5$ folgt.

163. Ein Kilogramm Eisen bedarf zu seiner Erwärmung um einen Grad $\frac{1}{9}$ Kalorie. Wenn nun 3 *l* Wasser von 17° sich

Digitized by Google

durch Hineinwerfen eines Stückchens Eisen vom Gewichte a Gramm auf 25° in der Temperatur erhöht, wie heifs war dann das Eisen zu schätzen?

Antwort. Auf $25 + \frac{216\,000}{a}$ Grad.

164. Eine dreistellige Zahl hat folgende Eigenschaften: Das Quadrat der letzten Ziffer rechts gibt die aus den beiden anderen Ziffern gebildete zweistellige Zahl. Bringt man die letzte Ziffer rechts an die erste Stelle links, so entsteht eine dreistellige, um den dritten Teil der ursprünglichen gröfsere Zahl. Wie heifst die Zahl?

Antwort. 648.

165. Bei einer zweiziffrigen Zahl ist die Ziffer der Zehner um 2 gröfser als die der Einer. Stellt man die Ziffern um, so erhält man $\frac{4}{7}$ der ursprünglichen Zahl. Wie heifst dieselbe?

Antwort. 42.

166. Der Nenner eines Bruches ist um 6 gröfser als der Zähler. Addiert man 6 zum Zähler und multipliziert gleichzeitig den Nenner mit 6, so erhält man $\frac{1}{6}$. Warum?

167. Jemand hat drei Gefäfse und in dem gröfsten derselben 8 l Milch. Die beiden kleineren fassen zusammen ebenfalls 8 l und sind leer. Er gieſst zuerst das mittlere Gefäfs voll, dann füllt er aus dem mittleren das kleinste. Hierauf entleert er das kleinste in das gröfste, und den Rest des mittleren gieſst er in das kleinste. Nun füllt er aus dem gröfsten das mittlere, aus dem mittleren das kleinste, entleert endlich das kleinste in das gröfste und hat in dem mittleren und gröfsten gleichviel. Wieviel Liter faſst das mittlere, wieviel das kleinste?

Antwort. 5 und 3 l.

Anleitung zur Lösung:

	$8\,l$	$x\,l$	$(8-x)\,l$
	Erstes	zweites	drittes Gefäfs
1.	8,	0,	0;
2.	$8-x$,	x,	0;
3.	$8-x$,	$2x-8$,	$8-x$;
4.	$16-2x$,	$2x-8$,	0;
5.	$16-2x$,	0,	$2x-8$;
6.	$16-3x$,	x,	$2x-8$;
7.	$16-3x$,	$4x-16$,	$8-x$;
8.	$24-4x$,	$4x-16$.	

Digitized by Google

Man findet die Lösung häufig als Rätselfrage gestellt: Wenn jemand 8 *l* Milch in einem Gefäfse und zwei leere Gefäfse mit 5 und 3 *l* Inhalt besitzt, wie kann er dann mit Hilfe dieser Gefäfse 4 *l* ausmessen? Vorstehende Aufgabe ist als Übung im Subtrahieren algebraischer Ausdrücke anzusehen.

168. Wenn man vier aufeinander folgende ganze Zahlen quadriert und die Quadrate addiert, so erhält man genau dasselbe, als wenn man die Summe der beiden mittleren Zahlen quadriert und zum Ergebnisse 5 zuzählt. Warum?

169. Die Summe der Quadrate von neun aufeinander folgenden ganzen Zahlen übertrifft immer um 60 das Quadrat der Summe der gröfsten, mittleren und kleinsten Zahl. Warum?

170. Die Summe der Quadrate von sieben aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist gleich dem siebenfachen Produkte der kleinsten dieser Zahlen mit derjenigen ganzen Zahl, welche der gröfsten folgt. Wie heifst die kleinste Zahl?

Antwort. 13.

Eine Verhältnisgleichung (Proportion) ist die Gleichsetzung von zwei Brüchen. Man wendet dabei gern den Doppelpunkt statt des Bruchstriches an, besonders in der Geometrie.

171. Man bilde eine Anzahl richtiger Verhältnisgleichungen.

Lösung. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3}$.

Hieraus entspringen u. a. folgende richtige Gleichungen:

$2 : 3 = 4 : 6$; $2 : 3 = 6 : 9$; $2 : 3 = 10 : 15$.

$4 : 6 = 6 : 9$; $8 : 12 = 10 : 15$; $10 : 15 = 6 : 9$.

In der Verhältnisgleichung

$$a : b = c : d$$

nennt man die Glieder a, b, c, d der Reihe nach 1., 2., 3., 4. Glied; a und d heifsen äufsere, b und c innere Glieder.

172. Welche Produktengleichung folgt aus der Verhältnisgleichung $a : b = c : d$?

173. Wie kann man den vorigen Satz in Worte fassen? Wie heifst seine Umkehrung?

174. Man zeige die Richtigkeit nachstehender Gleichungen, wenn $a : b = c : d$ richtig ist:

1) $a : c = b : d$; 2) $a : (a + b) = c : (c + d)$;

3) $a : (a - b) = c : (c - d)$; 4) $a : b = mc : md$.

Digitized by Google

Zahlenbeispiele.

$$5 : 6 = 20 : 24;\ 5 : 20 = 6 : 24;\ 5 : 11 = 20 : 44;$$
$$5 : 6 = 60 : 72.$$

Neben $a : (a - b) = c : (c - d)$ ist auch richtig

$$a : (b - a) = c : (d - c).$$

Daher: $5 : 1 = 20 : 4$. Im folgenden Lehrgange wird $5 : (-1) = 20 : (-4)$ betrachtet werden können.

175. Man bestimme x aus den Verhältnisgleichungen:

$$x : (x + 4) = 13 : 17.$$
$$2x : (2x + 7) = 5 : 11.$$
$$(3x + 4) : (3x - 2) = 25 : 19.$$
$$(x + 6) : (x - 4) = 9 : 4.$$
$$(x - 17) : (x - 19) = 7 : 6.$$

176. Auf einer Strecke $AB = 10$ ist ein Punkt C so zu bestimmen, dafs das Teilverhältnis $CA : CB$ den Wert 2 erhält.

Lösung. $x : (10 - x) = 2 : 1.$

177. Man löse dieselbe Aufgabe für den Wert des Teilverhältnisses 3; 5; 7; 100; 1; 0,5; 2 : 3; 1 : 5; 1 : 7; 2 : 9; 2 : 11; 1 : 1000.

178. Die Strecke $AB = 10$ sei über B hinaus verlängert und auf der Verlängerung ein Punkt C gewählt. Dann ist $CA : CB$ immer ein unechter Bruch. AB sei über A hinaus verlängert und auf der Verlängerung ein Punkt C gewählt. Dann ist das Teilverhältnis $CA : CB$ immer ein echter Bruch.

Man bestimme C so, dafs das Teilverhältnis den Wert 2 erhält.

179. Nach den Festsetzungen der Aufgabe 178 soll der Punkt C auf einer Verlängerung der Strecke AB so bestimmt werden, dafs das Teilverhältnis $CA : CB$ die in Nr. 177 angegebenen Werte annimmt.

180. Man zeige, dafs aus der Verhältnisgleichung $a : b = c : d$ sich ergibt:

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2,$$
$$a^3 : b^3 = c^3 : d^3.$$

Welcher allgemeine Satz läfst sich aufstellen?

181. Wenn die Verhältnisgleichungen bestehen:

$$a : b = c : d,$$
$$\alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

so ist auch:

$$a\alpha : b\beta = c\gamma : d\delta.$$

Digitized by Google

182. Wenn die Verhältnisgleichungen bestehen:

$$x : y = a : b;\ y : z = b : c,$$

so ist auch:

$$x : z = a : c.$$

183. Man ziehe entsprechende Folgerungen aus

$$x : y = a : b;\ y : z = b : c;\ z : u = c : d.$$

184. Eine Strecke $AB = 57$ soll so geteilt werden, dafs die Teilstücke sich der Reihe nach verhalten wie die Zahlen 3, 4, 5, 7.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.

PLÜSS, Dr. B., **Naturgeschichtliche Bilder** für Schule und Haus. Zoologie — Botanik — Mineralogie. 244 Tafeln mit 1060 Holzschnitten und mehr als 1200 Aufgaben. *3. Aufl.* *M.* 4.80; geb. *M.* 5.80.

PÜTZ, W., **Lehrbuch der vergleichenden Erdbeschreibung** f. d. oberen Klassen höherer Lehranstalten u. z. Selbstunterricht. *17. Aufl.*, bearb. von *F. Behr*. *M.* 3; geb. *M.* 3.45.

— **Leitfaden der vergleichenden Erdbeschreibung.** *25. Aufl.*, bearb. von *F. Behr*. *M.* 1.60; geb. *M.* 2.

REUTER, Dr. W., **Litteraturkunde**, enthaltend Abrifs d. Poetik u. Geschichte der deutschen Poesie. Für höhere Lehranstalten, Töchterschulen u. z. Selbstunterrichte. *16. Aufl.*, bearb. von *L. Lütteken*. *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

ROLFUS, Dr. H., **Leitfaden der allgemeinen Weltgeschichte**, ergänzt u. erläutert durch Anmerkungen. Für erweiterte Schulanstalten u. z. Selbstunterricht. *4. Aufl.* **I. Das Altertum.** *M.* 1.60. — **II. Die mittlere Zeit.** *M.* 1.40. — **III. Die neue Zeit.** *M.* 2. — In einem Bande *M.* 5; geb. *M.* 5.50.

ROSENFELD, M., **Elementarunterricht in der Chemie.** Mit 53 Abbildungen. *M.* 1.60; geb. *M.* 1.90.

— **Experimentierbuch für den Elementarunterricht in der Chemie.** Mit 44 Abbildungen. *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50. (Für die Hand des Lehrers.)

SACHSE, J. J., **Die deutsche Grammatik** in ihren Grundzügen. Ein zugl. f. den Selbstunterricht bestimmtes Hand- u. Übungsbuch z. Gebrauche an Mittelschulen, Präparanden-Anstalten, Schullehrer-Seminarien u. d. untern u. mittlern Klassen höherer Lehranstalten. Vier Kurse. *M.* 1.90.

I. Allgemeine Wort- und Satzlehre. *3. Aufl.* 50 *Pf.* — II. Wortarten und Wortbildung. *2. Aufl.* 40 *Pf.* — III. Die Syntax. *2. Aufl.* 40 *Pf.* — IV. Allgemeine Stilistik und Poetik. *2. Aufl.* 60 *Pf.*

SCHWERING, Dr. K., u. Dr. W. **KRIMPHOFF**, **Ebene Geometrie.** Nach den neuen Lehrplänen bearb. Mit 151 Figuren. *3. Aufl.* *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

SCHWERING, Dr. K., **Arithmetik und Algebra** für höhere Lehranstalten. *2. Aufl.* *M.* 1; geb. *M.* 1.30.

— **Trigonometrie** für höhere Lehranstalten. Nach den amtlichen Lehrvorschriften bearb. *2. Aufl.* Mit 16 Figuren. 80 *Pf.*; geb. *M.* 1.10.

Apart: **Anfangsgründe der Trigonometrie** f. d. 6. Stufe höh. Lehranstalten. *2. Aufl.* 20 *Pf.*

— **Stereometrie** für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearb. *2. Aufl.* Mit 41 Figuren. 80 *Pf.*; geb. *M.* 1.10.

Apart: **Raumlehre** f. 6stufige Schulen u. Lehrerseminare nach den neuen Lehrplänen bearb. *2. Aufl.* 25 *Pf.*

— **Anfangsgründe der analytischen Geometrie** für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearb. Mit 7 Figuren. 40 *Pf.*

— **100 Aufgaben aus der niederen Geometrie** nebst vollständ. Lösungen. Mit 104 Abbildungen. *2. Aufl.* *M.* 2; geb. *M.* 2.35.

— **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik** f. höhere Lehranstalten. **I.** 80 *Pf.* **II.** *M.* 1. **III.** *M.* 1.20. — Begleitwort dazu gratis.

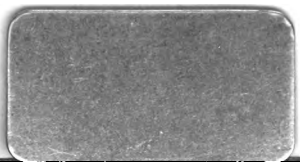
VOSEN, Dr. C. H., **Kurze Anleitung zum Erlernen der hebräischen Sprache** für Gymnasien u. für das Privatstudium. Neu bearb. u. herausgeg. von Dr. **Fr. Kaulen**. *18. Aufl.* *M.* 1.30; geb. *M.* 1.55.

WETZEL, Dr. M., **Griechisches Lesebuch** mit deutschen Übungsstücken f. Unter- und Obertertia. *5. Aufl.* *M.* 2.20; geb. *M.* 2.55.

ZEPF, K., **Einführung in die Mineralogie und Chemie** nebst einem kurzen Abrifs über Gesteinslehre und Erdgeschichte. Mit 83 Abbildungen und 2 Farbendrucktafeln. *M.* 1.80; geb. *M.* 2.10.

— **Bau, Funktion und Pflege des menschlichen Körpers.** Mit besonderer Berücksichtigung seiner Ernährung, der Nahrungsstoffe und der Nahrungsmittel. Mit 66 Abbildungen und 2 Tafeln. *M.* 1.40; geb. *M.* 1.70.

Diese beiden Lehrbücher für den Unterricht an Lehrer- und Lehrerinnenseminarien, Höheren Mädchenschulen und verwandten Anstalten sowie zum Selbstunterricht bilden die zweite, verbesserte und erweiterte Auflage (in zwei Teile zerlegt) des „Leitfadens für den ersten Unterricht in der Naturkunde".



Digitized by Google